ÁLGEBRA

2012 JUNIO. Opción A

a) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} m & m & m^2 \\ 1 & m^2 & m^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, estudia, según los valores de m, el rango de la matriz A

b) Resuelve, si es posible, el sistema: $A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

SOL A: m≠-1,0,1 -> rang (A)=3; m=-1,0 -> rang(A)=2; m=1 -> rang(A)=1 (0,5 valores m + 1,5p)

SOL B: m=1 -> x=1-λ-μ, y=λ, z=μ (1p)

JUNIO. Opción B

Dado el sistema $\begin{cases} x-2y+3z=5 \\ x-3y+2z=-4 \end{cases}$

a) Calcula el valor de α para que al añadirle la ecuación $\alpha x+3y+z=9$, resulte un sistema compatible indeterminado. Resuélvelo, si es posible, para $\alpha=0$.

b) ¿Existe algún valor de α para el cual el sistema con estas 3 ecuaciones no tiene solución?

SOL A: SCI cuando α=0 (1p), con α=0 -> x=23-5λ, y=9-λ, z=λ (1p)

SOL B: el sistema siempre tiene solución (1p)

SEPTIEMBRE. Opción A

a) Calcula, según los valores de α, el rango de $A=\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ a+1 & a & 0 \\ 0 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$.

Para $a=1$, calcula el determinante de la matriz $2A^t\cdot A^{-1}$

b) Sea $B=\begin{pmatrix} -1/2 & x & 0 \\ y & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula x e y para que se cumpla que $B^{-1}=B^t$

SOL A: m≠0, -1, -1/2 -> rang(A)= 3; m=0, -1, -1/2 -> rang(A)= 2; α=1 -> det=$2^3\cdot 6\cdot 1/6=8$ (2p)

SOL B: $x=y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ o $x=y=-\sqrt{3}/2$ (1p)

SEPTIEMBRE. Opción B

a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema d $\begin{cases} x+y=m \\ x-my=-13 \\ 3x+5y=16 \end{cases}$

b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m=2$.

SOL A: m=2 o m=5/3 -> rang(C)=rang(C)=2= nº incog. SCD; m≠2, 5/3 -> rang(C)= 2 < rang(C*) SI (2p)*

SOL B: x=-3, y=5 (1p)

2013 JUNIO. Opción A

Dadas las matrices $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, sea B^t la matriz traspuesta de B y I la matriz identidad de orden 3,

a) Estudia, según los valores del parámetro λ, el rango de $AB^t+\lambda I$

b) Calcula la matriz X que verifica: $AB^tX-X=2B$

SOL A: rang =3 si λ≠0; rang =1 si λ=0 (1,5p); SOL B: a=-8, b=4, c=-2 (1,5p)

JUNIO. Opción B

a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+my+z=2 \\ mx-y+z=0 \\ 2x-y+2z=1 \end{cases}$

b) Resuélvelo, si es posible, para el caso $m=1$.

SOL A: m=-1/2 -> rang(C)=2 < 3=rang(C). SI / m=1 -> rang(C)= 2 =rang(A)<nº incog SCI.*

m≠ -1/2 y m≠1 -> rang(C)= 3 = rang (C) = nº incog SCD (0,5p valores m) (1,5p discutir)*

SOL B: x=λ; y= 1; z=1-λ (1p)

SEPTIEMBRE. Opción A

a) Sea M una matriz cuadrada de orden 2 tal que $M^2=4M$. Determina la matriz X que verifica la ecuación matricial $(M-2I)^2X=I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

b) Determina todas las matrices B de la forma $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ que verifiquen $B^2=4B$. Si alguna es inversible, calcula su inversa.

c) ¿Cuándo un sistema de ecuaciones lineales se dice homogéneo? ¿Puede ser incompatible un sistema de ecuaciones lineales homogéneo? Justifica la respuesta.

SOL A: X=$\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ (0,5p); SOL B: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ (1p); inversa: $\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ (0,5p)

SOL C: (0,5 + 0,5)

SEPTIEMBRE. Opción B

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$

a) Calcula, según los valores de m, el rango de A
b) ¿Coincide A con su inversa para algún valor de m? Para $m=0$, calcula A^{60}
c) Si $m=2$ y A es la matriz de coeficientes de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, ¿podemos afirmar que el sistema tiene solución única? Justifica tu respuesta.

SOL A:m=+ -1 rang(A)=2; m≠+-1 rang(A)=3 (1p); SOL B: $A^{60}=(A^2)^{30}=I^{30}=I$ (0,5 A=A^{-1}, 0,5 A^{60})
SOL C: m=2 -> rang(A)=3 -> SCD única solución (1p)

2014 JUNIO. Opción A

a) Discute, según los valores del parámetro m, el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$
b) ¿Coincide A con su inversa para algún valor de m?
c) Determina una matriz simétrica X de orden 2 tal que $X\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ y el determinante de la matriz $3X$ sea -9

SOL A: m=1 o m=-1 -> rang(A)=2 / m≠ +-1 -> rang(A)=3 (1p)
SOL B: no, nunca (0,5p); SOL C: $X=\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{pmatrix}$

JUNIO. Opción B

c) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x-y-2z=m+9 \\ mx+3y-z=0 \\ 3x-y+5z=0 \end{cases}$
d) Resuélvelo, si es posible, cuando $m=-9$.

SOL A: m=-9 -> rang(C)=rang(C)=2 < 3=nº inc. SCI / m≠9 -> rang(C)=rang(C*)=3=nº inc SCD (2p)*
SOL B: x=λ; y=3λ; z=0 (1p)

SEPTIEMBRE. Opción A

a) Define menor complementario y adjunto de un elemento en una matriz cuadrada
b) Sea I la matriz identidad de orden 3 y $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determina los valores de λ para los que $A-\lambda I$ no tiene inversa.
c) Calcula la matriz X que verifica $AX-A=2X$, siendo A la matriz dada en el apartado b.

SOL A: (1p)
SOL B: A+ λI no tiene inversa para λ=-3, λ=-1, λ=1 (1p); SOL C: $X=\begin{pmatrix} 5/3 & 0 & 4/3 \\ 2/3 & -1 & 4/3 \\ 4/3 & 0 & 5/3 \end{pmatrix}$ (1,5p)

SEPTIEMBRE. Opción B

a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+my+(m-1)z=m \\ (m-1)y+z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$
b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m=3$.

SOL A: m=1 o m=2 -> rang(C)=2 < 3=rang(C) SI / m≠2 o m≠1 -> rang(C)=3 =rang(C*)=nº inc SCD (2p)*
SOL B: x=3/2; y=-3/2; z=3 (1p)

2015 JUNIO. Opción A

a) Calcula los posibles valores de a,b,c para que la matriz $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ verifique la relación $(A-2I)^2=0$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y 0 la matriz nula de orden 2.
b) ¿Cuál es la solución de un sistema homogéneo de dos ecuaciones con dos incógnitas, si la matriz de coeficientes es una matriz $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ verificando la relación $(A-2I)^2=0$?
c) Para $a=b=c=2$, calcula matriz X que verifica $A\cdot X=A^{-1}\cdot B$, siendo $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

SOL A: $a=2, b\in\mathbb{R}, c=2$ (1p); SOL B: x=y=0 (0,5p); SOL C: $=\begin{pmatrix} 1 & -1/4 & -2 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$(1,5p)

JUNIO. Opción B

a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones $\begin{cases} mx+3y+4z=m \\ x-4y-5z=0 \\ x-3y-4z=0 \end{cases}$
b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m=0$ y cuando $m=1$.

SOL A: m=-1 -> rang(C)=2 < 3=rang(A). SI / m≠-1 -> rang(C)= 3 =rang(A)=nº incog SCD (1p rangos)(1p discutir)
SOL B: para m=0 -> x=y=z=0 (0,5p); : para m=1 -> x=1/2; y= -1/2; z=1/2 (0,5p)

SEPTIEMBRE. Opción A

a) Define menor complementario y adjunto de un elemento en una matriz cuadrada

b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

I. Calcula el rango, según los valores de λ, *de* $A - \lambda I$, siendo I la matriz unidad de orden 3

II. Calcula la matriz X que verifica $XA - 2A = 3X$

SOL A: (1p)

SOL B: λ≠0; λ≠1; λ≠2 -> rang(A- λI)=3 ; λ=0, λ=1, λ=2 -> rang(A- λI)=2 (1p); $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ *(1p)*

SEPTIEMBRE. Opción B

a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y + z = m \\ x - y = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$

b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m = 0$.

SOL A: m=0 -> rang(C)=rang(A)=2 < 3=nº inc. SCI / m ≠0 -> rang(C)=2 ≠ 3=rang(A) SI (2p)

SOL B: x= -1/2 λ; y= -1/2 λ; z=λ (1p)

2016

JUNIO. Opción A

a) Calcula todas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix}$ de rango 2 tales que su inversa sea $A - 2I$, es decir, $A^{-1} = A - 2I$, siendo I la matriz unidad de orden 2.

b) Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} m+2 & -1 & m+1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ -1 & -2 & m+1 \end{pmatrix}$

i. Calcula, según los valores de m, el rango de M

ii. Para el valor $m = -1$, calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tales que $MX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

SOL A: planteamiento (1p); a=1, b=2; a=-1, b=2 (0,5p)

SOL B: $m = \mathbb{R} - (-3, -1) \rightarrow$ *rang(M)=3;* $m = -3, m = -1 \rightarrow$ *rang(M)=2 (0,75p); X=* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \lambda \in \mathbb{R}$*(0,75p)*

JUNIO. Opción B

c) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones $\begin{cases} mx + 3y + 4z = m \\ x - 4y - 5z = 0 \\ x - 3y - 4z = 0 \end{cases}$

d) Resuélvelo, si es posible, cuando $m = 0$ y cuando $m = 1$.

SOL A: m=-1 -> rang(C)=2 < 3=rang(A). SI / m≠-1 -> rang(C)= 3 =rang(A)=nº incog SCD (1p rangos)(1p discutir)

SOL B: para m=0 -> x=y=z=0 (0,5p); : para m=1 -> x=1/2; y= -1/2; z=1/2 (0,5p)

SEPTIEMBRE. Opción A

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a-2 & 1 \\ a-1 & a & -1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula, según los valores de a, el rango de A. Calcula, si existe, la inversa de A cuando $a = 0$.

b) Para $a = 0$, calcula la matriz que verifica $AXA^{-1} - A = 2I$

c) Para $a = 1$, calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tales que $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

SOL A: a=1 -> rang(A)=2 (0,5); a≠1 -> rang(A)=3 (0,5); $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ *(0,5p)*

SOL B: $B = A + 2I = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ *(1p); SOL C:* $X = \begin{pmatrix} -2\lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$ *(1p)*

SEPTIEMBRE. Opción B

a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 4x + my + 3z = m \\ 2x + 3y + z = 3 \end{cases}$

b) Resuélvelo cuando $m = 5$.

SOL A: m=5 -> rang(C)=rang(A)=2 < 3=nº incog. SCI / m≠5 -> rang(C)=rang(A)=3=nº incog SCD (2p)

SOL B: x=2-2λ; y=λ; z= -1+λ (1p)

2017

JUNIO. Opción A

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determina, según los valores de λ, el rango de la matriz $AA^t - \lambda I$, siendo A^t la matriz traspuesta de A e I la matriz unidad de orden 2.

b) Determina la matriz $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ que verifica la ecuación matricial $AA^tX = 6X$.

SOL A: (0,25p) $AA^t - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 3 & 3-\lambda \end{pmatrix}$; (0,75p) rango: λ=0 y λ≠6 rang(AA^t-λI)=2; λ=6 o λ≠0 rang(AA^t-λI)=1

SOL B: (1p) $X = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$; $a \in \mathbb{R}$

JUNIO. Opción B

a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x \quad\quad - z = m \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m = 1$.

SOL A: (1p) m=1 -> rang(C)=2=rang(A)=2 < 3=nº incog. SCI / m≠1 -> rang(C)=2 < 3=rang(A) SI

SOL B: (1p) x=1+λ; y=0; z=λ

SEPTIEMBRE. Opción A

Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

d) Determina, según los valores de k, el rango de las matrices AB y BA

e) Para el valor $k = 0$, determina las matrices X que verifican $ABX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

SOL A: rang(AB)=2 (0,5); si k=-2 rang(BA)=1; si k≠2 rang(BA)=2 (0,5p); SOL B: X= $\begin{pmatrix} -\lambda \\ 4\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$; $\lambda \in \mathbb{R}$ *(1p)*

SEPTIEMBRE. Opción B

a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x - 2y \quad\quad = 0 \\ x \quad - y \quad + z = m \\ x + my - 2z = m \end{cases}$

b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m = 0$.

SOL A: m=0 -> rang(C)=rang(A)=2 < 3=nº incog. SCI / m≠0 -> rang(C)=rang(A)=3=nº incog SCD (1p)

SOL B: x=2λ; y=3λ; z=λ (1p)

2018

JUNIO Opción A

a) Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} m & m+4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula los valores de m para que la matriz inversa de M sea ¼ M.

b) Dadas las matrices $A = (-1 \quad 0 \quad 1)$, $B = (3 \quad 0 \quad 1)$, $C = (4 \quad -2 \quad 0)$, calcula la matriz X que verifica: $B^t \cdot A \cdot X + C^t = X$, siendo B^t y C^t las traspuestas de B y C respectivamente.

SOL A: m=-1 (1p); SOL B: $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4/3 \end{pmatrix}$ *(1p)*

JUNIO Opción B

a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x - 6y + mz = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = m \end{cases}$

b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m = 3$.

SOL A: (1p) m=3 -> rang(C)=2=rang(A)<nº incog. SCI / m≠3 -> rang(C)=3=rang(A)=nº incog. SCD

SOL B: x=-λ/3+2; y=λ/3+1; z=λ (1p)

SEPTIEMBRE Opción A

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) ¿qué relación existe entra su inversa A^{-1} y su traspuesta A^t?

b) Estudia, según los valores de λ, el rango de $A - \lambda I$, siendo I la matriz identidad de orden 3. Calcula las matrices X que verifican $AX + X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

SOL A: $A^{-1} = A^t$ *(0,5p); SOL B: si λ=-1 rang(A-λI)=2; si λ≠-1 rang(A-λI)=3; X=* $\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$ *(1,5p)*

SEPTIEMBRE Opción B

a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x \qquad -z=m \\ x+y-z=1 \end{cases}$

b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m=1$.

SOL A: (1p) m=1 -> rang(C)=2=rang(A)=2 < 3=nº incog. SCI / m≠1 -> rang(C)=2 < 3=rang(A) SI

SOL B: (1p) x=1+λ; y=0; z=λ

2019

JUNIO Opción A

a) Suponiendo que A y X son matrices cuadradas y que la matriz $A+I$ es invertible, despeja X en la ecuación $A-X=AX$

b) Si $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcula X tal que $A-X=AX$

SOL A: X=(A+I)⁻¹A; SOL B: $X=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

JUNIO Opción B

a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x- \quad y+ \qquad 3z=0 \\ \qquad my+(3-m)z=-6 \\ 2x- \quad y+ \qquad mz=6 \end{cases}$

b) Resuélvelo, si es posible, en los casos $m=0$ y $m=4$.

SOL A: m=0 -> rg(A)=2=rg(B) SCI / m=3 -> rg(A)=2; rg(B)=3, SI / m≠0 y m≠3 -> rg(A)=rg(B)=3 SCD

SOL B: m=0 -> x=α, y=-6+2α, z=-2 / m=4 -> x=-9, y=0, z=6

JULIO. Opción A

a) Despeja X en la ecuación $XA+B=C$, sabiendo que A es una matriz invertible.

b) Calcula X tal que $XA+B=C$ si $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

SOL A: $X=(C-B)A^{-1}$; *SOL B:* $X=1/5\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 7 & -3 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$

JULIO Opción B

a) Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema $\begin{cases} x- \qquad y+ \qquad 3z=m \\ \qquad my- \qquad 2z=-2 \\ x+(m-1)y+(m+3)z=m \end{cases}$

b) Resuélvelo, si es posible, en los casos $m=0$ y $m=2$.

SOL A: m≠0 y m≠-2 -> rg(A)=rg(B)=3 SCD / m=0 -> rg(A)=rg(B)=2 SCI / m=-2 -> rg(A)=2 y rg(B)=3 SI

SOL B: m=0 -> x=α, y=3+α, z=1 / m=2 -> x=0, y=-1/2, z=1/2