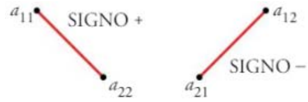
DETERMINANTES

Un determinante es un valor numérico asociado a una matriz. Sólo las cuadradas tienen determinante

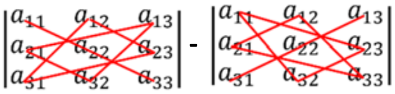
DETERMINANTE MATRIZ ORDEN 2

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\quad \det A=|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$



DETERMINANTE MATRIZ ORDEN 3 (SARRUS)

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{21}a_{12}a_{33}$$



RECUERDA:

PROPIEDADES

LÍNEA: fila o columna

- Si una matriz tiene una línea de ceros, el determinante es 0
- Si intercambiamos dos líneas entre sí, el determinante cambia de signo
- Si una matriz tiene dos filas o dos columnas iguales (o proporcionales), el determinante es 0
- Si multiplicamos un número por un determinante, se multiplica el número por los elementos de sólo una línea (y viceversa)

$$2\cdot\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1\cdot 2&2\cdot 2\\3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&4\\3&4\end{vmatrix}\qquad\qquad \begin{vmatrix}2a&2b\\-3&-4\end{vmatrix}=2\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}a&b\\3&4\end{vmatrix}$$

- Descomposición en suma:

$$\begin{vmatrix}1+4&2\\3+4&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4&2\\4&4\end{vmatrix}$$

- Si a una línea le sumamos una combinación lineal de las demás paralelas, su determinante no varía.
- Si una matriz tiene una línea combinación lineal de las demás paralelas, su determinante = 0. (Igualmente, si un determinante = 0 es que tiene alguna línea combinación lineal de las otras.)
- $|A|=|A^t|$
- $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$
- $|A^{-1}|=1/|A|$
- $|aA|=a^n\cdot|A|\rightarrow \text{siendo } a \text{ un número y } A \text{ una matriz de orden } n$

MENOR COMPLEMENTARIO Y ADJUNTO

- **Menor Complementario**: Es el determinante resultante al tachar la fila i y columna j → α_{ij}

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\rightarrow\ \alpha_{11}=\begin{pmatrix}\cancel{1}&\cancel{2}\\\cancel{3}&4\end{pmatrix}=4$$

- **Adjunto**: Es el menor complementario multiplicado por $(-1)^{i+j}\rightarrow A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot\alpha_{ij}$

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\rightarrow\ A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\alpha_{11}=1\cdot 4=4$$

TRUCO: Regla para signos de los adjuntos $\begin{bmatrix}+&-\\-&+\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+&-&+\\-&+&-\\+&-&+\end{bmatrix}$

- **Cálculo de determinantes por adjuntos:** Multiplicar los elementos de una línea por sus adjuntos

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&0&1\\4&0&5\end{pmatrix}\rightarrow\ |A|=1\cdot A_{11}-2\cdot A_{12}+0\cdot A_{13}=(-1)^2\cdot M_{11}+(-1)^3\cdot M_{12}=-22$$

Elegir la línea con más ceros! $\rightarrow\ |A|=2\cdot A_{12}+0\cdot A_{22}+0\cdot A_{32}=(-1)^3\cdot M_{12}=-22$ CUIDADO SIGNOS!

Para matrices de orden superior a 3:

- Elegir la línea que más ceros tenga, y si es posible, un 1. Elegir el número más pequeño como pivote y hacer ceros con el resto.
- Resolver por método de adjuntos. No olvidar → $(-1)^{i+j}$ *(¡signo del adjunto!)*

- **Matriz adjunta**: Matriz resultante de sustituir cada elemento a_{ij} por su adjunto $A_{ij} \rightarrow adj(A)$

OJO: signos adjuntos $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow adj(A) = \begin{pmatrix} +\alpha_{11} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & +\alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ RECUERDA: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$

MATRIZ INVERSA

La condición necesaria y suficiente para que una matriz tenga inversa, es que su determinante $\neq 0$

$$A^{-1} = \frac{[adj(A)]^t}{|A|}$$

RECUERDA:
Muy importante esta condición

EJEMPLO: Calcular matriz inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

- $|A| = 2 - 0 = 2$ → Como es distinto de 0 tiene inversa
- $adj(A)$

$A_{11} = +\alpha_{11} = 2$	$A_{12} = -\alpha_{12} = -3$
$A_{21} = -\alpha_{21} = 0$	$A_{22} = +\alpha_{22} = 1$

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $[adj(A)]^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
- $A^{-1} = \frac{[adj(A)]^t}{|A|} = \frac{1}{|A|} \cdot [adj(A)]^t = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 2 & \frac{1}{2} \cdot 0 \\ \frac{1}{2} \cdot (-3) & \frac{1}{2} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

RANGO DE UNA MATRIZ

- En principio → más fácil mediante determinantes
- Si hay parámetros → más fácil mediante determinantes
- Si la matriz es de 4x4 → mejor utilizar Gauss

Procedimiento: calculamos los mayores determinantes posibles, y **cuando encontremos el primero ≠0** se acaba el problema. Su dimensión será igual a su rango.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -5$ → Como determinante 3x3 ≠ 0 → rang(A)=3

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow |B| = 0$ → rang(B) NO es 3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$ → rang(B)=2