VECTORES EN EL ESPACIO

BASE DE UN SISTTEMA DE VECTORES

Un conjunto de vectores forma una base del espacio y se denota por $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ si:

- $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ son linealmente independientes
- Cualquier otro vector se puede escribir como combinación lineal de ellos

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n$$

Base **ORTOGONAL**: los vectores que forman la base son perpendiculares entre sí.
Base **ORTONORMAL**: además de lo anterior, los vectores tienen la misma longitud (unitarios)
Base R^3 → los tres vectores son linealmente independientes.

$\vec{\imath}(1,0,0) \to eje\ x \quad \vec{\jmath}(0,1,0) \to eje\ y \quad \vec{k}(0,0,1) \to eje\ z$ ← Base canónica

---

MÓDULO DE UN VECTOR $\vec{u}(x_1, y_1, z_1) \to |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

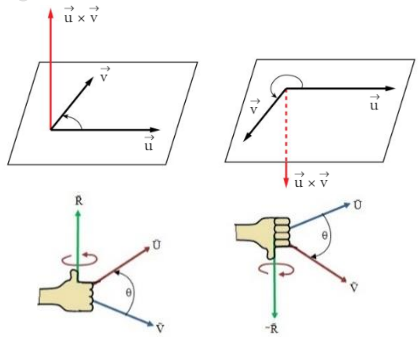
Con $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ el punto medio del segmento AB es $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right) = \frac{A+B}{2}$

CRITERIO DE PERPENDICULARIDAD Y PARALELISMO

De dos vectores ambos no nulos: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$ ← MUY IMPORTANTE
Vectores paralelos $\vec{u}(x_1, y_1, z_1), \vec{v}(x_2, y_2, z_2)$ $si \to \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$

Da un nº **PRODUCTO ESCALAR** $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2\ (b.ortogonal)$

Da un vector **PRODUCTO VECTORIAL**



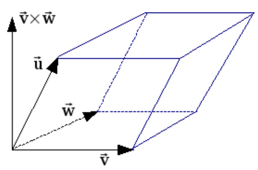
Se llama producto vectorial, $\vec{u} \times \vec{v}$ al **vector**:

- De módulo $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot sen\ \alpha$
- Dirección perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$
- Sentido: Si $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) < 180º$ ↑ - Si $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) > 180º$ ↓
- Si son linealmente dependientes: $\vec{u} \times \vec{v} = 0$

Propiedades:

- $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
- $\vec{u} \times \vec{u} = 0$
- $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w} \to$ implica que $\vec{w} \perp \vec{u}$ y $\vec{w} \perp \vec{v}$
- Los vectores de la base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ cumplen $\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}$, $\vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath}$, $\vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}$
- $(a\vec{u}) \times \vec{v} = a(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times (a\vec{v})$
- En general $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$
- Si $\vec{u}(x_1, y_1, z_1), \vec{v}(x_2, y_2, z_2) \to \vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$

Da un nº **PRODUCTO MIXTO DE VECTORES**



$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Si $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \to$ vectores coplanarios (en el mismo plano)

PROYECCIÓN VECTOR $\vec{u}$ SOBRE $\vec{v}$

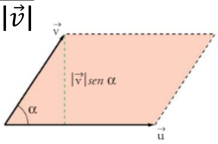
$$Proy_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|} = |\vec{u}| \cdot cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$$

ÁNGULO ENTRE VECTORES

$$cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{v}|}$$

ÁREA PARALELOGRAMO

$A = |\vec{u} \times \vec{v}|$

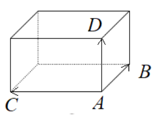


ÁREA TRIÁNGULO

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{u} \times \vec{v}|$$

VOL. PRISMA PARALELEPÍPEDO

$$V = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|$$



VOLUMEN TETRAEDRO

$$V = \frac{1}{6} \cdot |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|$$