RECTAS Y PLANOS

RECTA $r: \overrightarrow{OX} = \vec{p} + \lambda\vec{d} \rightarrow \ r: (x,y,z) = (x_o, y_o, z_o) + \lambda(d_x, d_y, d_z)$

Ecuaciones paramétricas $r: \begin{cases} x = x_o + \lambda d_x \\ y = y_o + \lambda d_y \\ z = z_o + \lambda d_z \end{cases}$

Ecuación continua $\frac{x-x_o}{d_x} = \frac{y-y_o}{d_y} = \frac{z-z_o}{d_z}$

(x,y,z) punto genérico
(x_o, y_o, z_o) punto concreto. Vector posición
(d_x, d_y, d_z) vector director (paralelo)

Ecuación vectorial $r: (x,y,z) = (x_o, y_o, z_o) + \lambda(d_x, d_y, d_z)$

Ecuación general o implícita $r: \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$ ← Recta como intersección de 2 planos

PLANO $\pi: \overrightarrow{OX} = \vec{p} + \lambda\vec{d} + \mu\vec{v} \ \rightarrow \ \pi: (x,y,z) = (x_o, y_o, z_o) + \lambda(d_x, d_y, d_z) + \mu(v_x, v_y, v_z)$

Ecuaciones paramétricas $\pi: \begin{cases} x = x_o + \lambda d_x + \mu v_x \\ y = y_o + \lambda d_y + \mu v_y \\ z = z_o + \lambda d_z + \mu v_z \end{cases}$

Ecuación general o implícita $Ax + By + Cz + D = 0$

(x,y,z) punto genérico
(x_o, y_o, z_o) punto concreto. Vector posición
(d_x, d_y, d_z) vector director (paralelo)
(v_x, v_y, v_z) vector director (paralelo)
(A,B,C) vector normal

PASAR RECTA DE FORMA IMPLÍCITA A PARAMÉTRICA

Tenemos la recta $r: \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$, aplicaremos Gauss

$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + y \quad\ \ = 1 \end{cases} \rightarrow F2 = F2 - F1 \rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -y + z = 1 \end{cases}$ → Definimos $z = t$ y resolvemos:

$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -y + z = 1 \\ z = t \end{cases} \rightarrow z = t; y = -1 + t; x = 2 - t \rightarrow r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + t \\ z = 0 + t \end{cases}$ MUY IMPORTANTE!

Si vemos que van a salir fracciones, volvemos a hacer Gauss pero eliminando otra variable.

POSICIONES RELATIVAS DOS RECTAS

Rectas r y s vienen determinadas por un punto y vector director: $r: \overrightarrow{OX} = P + \lambda\vec{u}, s: \overrightarrow{OX} = Q + \lambda\vec{v}$

$r: \begin{cases} x = x_1 + \lambda u_x \\ y = y_1 + \lambda u_y \\ z = z_1 + \lambda u_z \end{cases}, \quad s: \begin{cases} x = x_2 + \mu v_x \\ y = y_2 + \mu v_y \\ z = z_2 + \mu v_z \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} u_x & v_x & PQ_x \\ u_y & v_y & PQ_y \\ u_z & v_z & PQ_z \end{pmatrix}$

- $rang(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \rightarrow rang(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}) = 1 \rightarrow$ Coincidentes
- $rang(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \rightarrow rang(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}) = 2 \rightarrow$ Paralelas plano
- $rang(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \rightarrow rang(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}) = 2 \rightarrow$ Se cortan plano y punto
- $rang(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \rightarrow rang(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}) = 3 \rightarrow$ Se cruzan nada en común

OTRA FORMA:
Si $\vec{u} \nparallel \vec{v} \rightarrow$ se cortan o cruzan
Si $\vec{d} \parallel \vec{n} \rightarrow$ paralelas o coincidentes (calcular pto. corte)

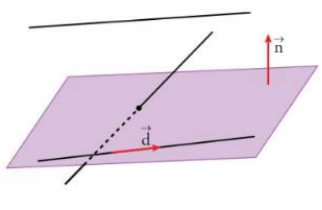
RECUERDA: puede aparecer λ o t

POSICIONES RELATIVAS PLANO Y RECTA

Con el plano $\pi: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y la recta $r: \begin{cases} A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}$

Con la matriz A de coeficientes y A^* la ampliada: $A = \begin{pmatrix} A_1 B_1 C_1 \\ A_2 B_2 C_2 \\ A_3 B_3 C_3 \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} A_1 B_1 C_1 D_1 \\ A_2 B_2 C_2 D_2 \\ A_3 B_3 C_3 D_3 \end{pmatrix}$

- $rang(A) = 2 \rightarrow rang(A^*) = 2 \rightarrow SCI \rightarrow$ Recta contenida en el plano
- $rang(A) = 2 \rightarrow rang(A^*) = 3 \rightarrow \ SI \ \rightarrow$ Paralelos
- $rang(A) = 3 \rightarrow rang(A^*) = 3 \rightarrow SCD \rightarrow$ Se cortan



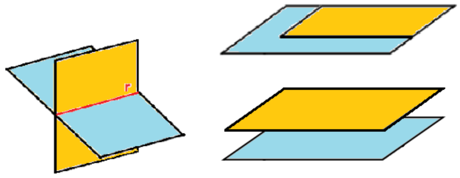
OTRA FORMA: Si $\vec{d} = \vec{n} \rightarrow$ recta y plano 90º. Perpendiculares
Si $\vec{d} \perp \vec{n} \rightarrow$ recta contenida o paralela. Si no → corta al plano

POSICIONES RELATIVAS DOS PLANOS

Con el sistema formado por las ecuaciones de los dos planos $\begin{cases} \pi: Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi': A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$.

Con la matriz A de coeficientes y A^* la ampliada: $A = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$

- $rang(A) = 1 = rang(A^*) = 1 \rightarrow SCI \rightarrow$ Coincidentes
- $rang(A) = 1 \neq rang(A^*) = 2 \rightarrow SI \rightarrow$ Paralelos
- $rang(A) = 2 = rang(A^*) = 2 \rightarrow SCD \rightarrow$ Se cortan

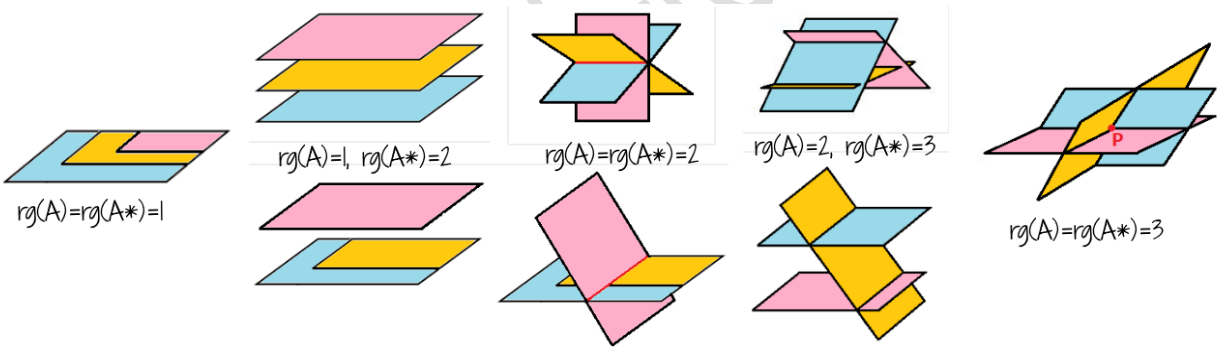


POSICIONES RELATIVAS TRES PLANOS (no paralelos)

Con el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos $\begin{cases} \pi: Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi': A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ \pi'': A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases}$

Con la matriz A de coeficientes y A^* la ampliada: $A = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \\ A'' & B'' & C'' & -D'' \end{pmatrix}$

- $rang(A) = 1 = rang(A^*) = 1 \rightarrow SCI \rightarrow$ Coincidentes
- $rang(A) = 1 \neq rang(A^*) = 2 \rightarrow SI \rightarrow$ No solución
- $rang(A) = 2 = rang(A^*) = 2 \rightarrow SCI \rightarrow$ Se cortan (forman una recta)
- $rang(A) = 2 \neq rang(A^*) = 3 \rightarrow SI \rightarrow$ No solución
- $rang(A) = 3 = rang(A^*) = 3 \rightarrow SCD \rightarrow$ Una única solución: un punto

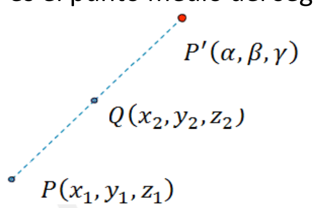


PUNTO SIMÉTRICO RESPECTO DE OTRO

El simétrico de $P(x_1, y_1, z_1)$ respecto de $Q(x_2, y_2, z_2)$ es $P'(\alpha, \beta, \gamma)$ si Q es el punto medio del segmento PP'

$$\frac{x_1 + \alpha}{2} = x_2; \quad \frac{y_1 + \beta}{2} = y_2; \quad \frac{z_1 + \gamma}{2} = z_2$$

Visto de otra forma: $Q = \frac{P+P'}{2} \rightarrow P' = 2Q - P$



TRES PUNTOS ALINEADOS

Los puntos $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$ están alineados si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ tienen misma dirección

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2}$$

ECUACIONES DE LAS RECTAS DE LOS EJES Y LOS PLANOS DE LOS EJES

Recta eje X $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ Recta eje Y $\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$ Recta eje Z $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$

Plano $XY \rightarrow 0x + 0y + z = 0$; $(x, y, z) = (0,0,0) + \lambda(1,0,0) + \mu(0,1,0)$; $\vec{n} = (0,0,1), P(0,0,0)$
Plano $XZ \rightarrow 0x + y + 0z = 0$; $(x, y, z) = (0,0,0) + \lambda(1,0,0) + \mu(0,0,1)$; $\vec{n} = (0,1,0), P(0,0,0)$
Plano $YZ \rightarrow x + 0y + 0z = 0$; $(x, y, z) = (0,0,0) + \lambda(0,1,0) + \mu(0,0,1)$; $\vec{n} = (1,0,0), P(0,0,0)$