LIMITES

INDETERMINACIONES MÁS IMPORTANTES

$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	$\frac{0}{0}$	$(\pm\infty)\cdot 0$
$(+\infty)-(+\infty)$	$(+\infty)+(-\infty)$	$(+\infty)^0$
0^0	$1^{+\infty}$	$1^{-\infty}$

1. COMPARACIÓN DE INFINITOS CUANDO $x \to \pm\infty$

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \pm\infty$, entonces $f(x)$ es un infinito de orden superior a $g(x)$ si

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty, \text{ o lo que es lo mismo, } \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

Los órdenes de los infinitos en general se clasifican:

Función EXPONENCIAL (base mayor que 1) > POTENCIAS > LOGARITMOS

2. CÁLCULO DE LÍMITES CUANDO $x \to +\infty$

- **Cociente de polinomios $P(x)/Q(x)$**

Con $f(x) = \frac{ax^p+\cdots}{bx^q+\cdots} \approx \frac{a}{b}x^{(p-q)}$

  - Grado $P(x) > Q(x)$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ (el signo depende de $\frac{a}{b}$)
  - Grado $P(x) < Q(x)$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
  - Grado $P(x) = Q(x)$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{a}{b}$

- **Diferencia de expresiones infinitas**
  - Se aprecia a simple vista: La resta son infinitos de orden distinto: directamente $-\infty, +\infty$
  - Puede hacerse la operación: Si no se ve directamente, se resta y se calcula el límite.
  - Si hay raíces cuadradas:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to+\infty}\frac{[f(x)-g(x)][f(x)+g(x)]}{f(x)+g(x)} = \frac{f(x)^2-g(x)^2}{f(x)+g(x)}$$

Conviene saberse esta fórmula

- **Límites inmediatos relacionados con el número e**

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\,; \quad \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e} = e^{-1}$$

Con ello podemos deducir otros límites:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{-1} = e^{-1}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x} = \to$ haciendo $2x = y \to \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^a = e^a \rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{ax} = e^{-a}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax+b} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^b = e^a\cdot 1 = e^a$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x/k}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x/k}\right)^{x/k}\right]^k = e^k$

- **Expresiones del tipo 1^∞**

Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = +\infty$, entonces: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-1]\cdot g(x)}$

3. CÁLCULO DE LÍMITES CUANDO $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x)$$

¡CUIDADO!

$\sqrt[2]{-\infty} = \nexists$; $\sqrt[3]{-\infty} = -\infty$

4. LÍMITE EN UN PUNTO

- **Cociente de polinomios (0/0)**
  - $\lim_{x\to 1} \frac{2x}{x+1} = \frac{2\cdot 1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$
  - $\lim_{x\to 1} \frac{2x}{x-1} = \frac{2}{1-1} = \frac{2}{0} = \infty \to \textit{Límites laterales}: \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} \frac{2\cdot 0{,}9}{0{,}9-1} = \frac{+}{-} = -\infty \\ \lim_{x\to 1^+} \frac{2\cdot 1{,}1}{1{,}1-1} = \frac{+}{+} = +\infty \end{cases}$
  - $\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x^2-1} = \frac{0}{0} = Indt \to \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)}{(x+1)} = \frac{0}{2} = 0$
- **Diferencias, indeterminación** $(+\infty - \infty)$
  - Realizamos la operación resta, y calculamos el límite sobre el resultado.
- **Expresiones del tipo $1^{+\infty}$**

  Si $\lim_{x\to c} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to c} g(x) = +\infty$, entonces: $\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to c}[f(x)-1]\cdot g(x)}$

5. REGLA DE L'HÔPITAL

¡Muy importante esta regla!

Sean f y g dos funciones derivables en un entorno del punto a:

Si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ó $= \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ y $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$, entonces $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$

Si al aplicar la regla volvemos a tener una indeterminación, podemos repetir el proceso.
Algunas expresiones $(\infty - \infty)$ o 1^{∞} se pueden expresar en forma de cociente para aplicar L'Hôpital.

SUMA $\lim[f(x) + g(x)] = \lim f(x) + \lim g(x)$

$k + 0 = k$	$k + \infty = \infty$	$0 + \infty = \infty$
$\infty + 0 = \infty$	$\infty + k = \infty$	$\infty + \infty = \infty$

DIFERENCIA $\lim[f(x) - g(x)] = \lim f(x) - \lim g(x)$

$-\infty - \infty = -\infty$	$k - \infty = -\infty$	$0 - \infty = -\infty$
$\infty - 0 = \infty$	$\infty - k = \infty$	$+\infty - \infty = Indet.$

PRODUCTO $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$ CUIDADO signos + - del ∞

$0 \cdot 0 = 0$	$0 \cdot k = 0$	$0 \cdot \infty = Indet.$
$\infty \cdot 0 = Indet.$	$\infty \cdot k = \infty\ (k \neq 0)$	$\infty \cdot \infty = \infty$

COCIENTES $\lim[f(x)/g(x)] = \lim f(x)/\lim g(x)$

$0/0 = Indet.$	$0/k = 0$	$0/\infty = 0$
$k/0 = Indet.$ =Límites laterales	$k/k = 1$	$k/\infty = 0$
$\infty/0 = \infty$	$\infty/k = \infty$	$\infty/\infty = Indet.$

POTENCIAS $\lim f(x)^{g(x)} = \lim f(x)^{\lim g(x)}$ $(si\ f(x) > 0)$

$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$	$(+\infty)^{-\infty} = 0$	$(-\infty)^{-\infty} = \nexists$

$Si\ k < 0 \to$	$k^0 = 1$	$k^{+\infty} = \nexists$	$k^{-\infty} = \nexists$	$(+\infty)^k = 0$
$Si\ k = 0$	$0^0 = Indet.$	$0^{\infty} = 0$	$0^{-\infty} = \pm\infty$	$\infty^0 = Indet.$
$Si\ 0 < k < 1 \to$	$k^0 = 1$	$k^{+\infty} = 0$	$k^{-\infty} = +\infty$	$(+\infty)^k = +\infty$
$Si\ 1 < k \to$	$k^0 = 1$	$k^{+\infty} = +\infty$	$k^{-\infty} = 0$	$(+\infty)^k = +\infty$
$Si\ k = 1 \to$	$1^0 = 1$	$1^{+\infty} = Indet.$	$1^{-\infty} = Indet.$	

OTRAS OPERACIONES CON LÍMITES

$$\lim\,[k \cdot f(x)] = k \cdot \lim\, f(x)$$

$$\lim\left[\frac{f(x)}{k}\right] = \frac{\lim\, f(x)}{k} = \frac{1}{k}\lim\, f(x)$$

(Siendo K un nº)

$$\lim\left[\frac{k}{f(x)}\right] = \frac{k}{\lim\, f(x)}$$

$$\lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\, f(x)}$$

$$\lim[\log f(x)] = \log[\lim\, f(x)]$$

CONTINUIDAD

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Una función es continua en un intervalo de $\mathbb{R}$ si es continua en cada punto del intervalo.

- Una función (x) es continua en un punto x_0 si verifica:
  - $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, es decir, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$,
  - $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = k$, para todo $k \in \mathbb{R}$
- Función a trozos

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x < k \\ f_2(x) & x \geq k \end{cases}$$

Recuerda!
Si falta el signo = no es continua

Entonces

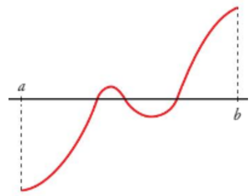
$\lim\limits_{x \to k^-} f(x) = \lim\limits_{x \to k} f_1(x) = f_1(k)$

$\lim\limits_{x \to k^+} f(x) = \lim\limits_{x \to k} f_2(x) = f_2(k)$

Para que sea continua en $x = k \rightarrow f_1(k) = f_2(k)$

- **TEOREMA DE BOLZANO**

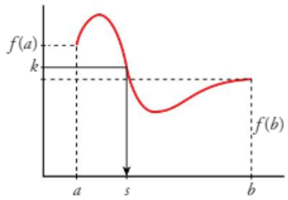
Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y signo de $f(a) \neq$ signo de $f(b)$, entonces existe por lo menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$



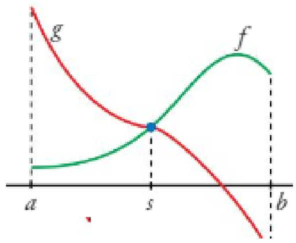
  - **Teorema de los valores intermedios (Darboux)**

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$
entonces toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$.

Cualquiera que sea el num. k entre $f(a)$ y $f(b)$:
existe un num. s, $a < s < b$ tal que $f(s) = k$.

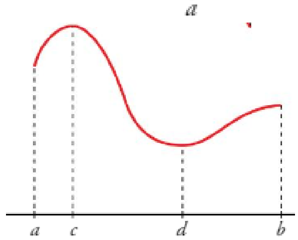


Si f y g son continuas en $[a,b]$ y $f(a) < g(a)$ y $f(b) > g(b)$, entonces existe un numero $s \in (a,b)$ tal que $f(s) = g(s)$



- **TEOREMA DE WEIERSTRASS**

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ entonces tiene un máx. y un min. absoluto en ese intervalo.
Es decir, existen dos numeros $c, d \in [a,b]$ tales que para cualquier $x \in [a,b], f(d) \leq f(x) \leq f(c)$



CUIDADO!!! : Senx y cosx en RADIANES