DERIVADAS Y APLICACIONES

DERIVABILIDAD DE UNA FUNCIÓN

Una función f es derivable en un punto x_0 si verifica:

- La función f es continua en $x_0 \rightarrow f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$
- Existe la derivada en x_0, es decir, coinciden sus derivadas laterales: $f´(x_0^-) = f´(x_0^+)$

Si una función es derivable en un punto, necesariamente es continua en él.

DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

Tanto la base como el exponente dependen de x: $y = f(x)^{g(x)}$

Se toman logaritmos a ambos lados y aplican las propiedades de los logaritmos:

$$ln\, y = ln\, f(x)^{g(x)} \rightarrow \ln y = g(x) \ln f(x) \rightarrow \frac{y'}{y} = g'(x) \cdot ln\, f(x) + g(x) \cdot \frac{f´(x)}{f(x)}$$

$$y'(x) = \left[g´(x) \cdot ln\, f(x) + g(x) \cdot \frac{f´(x)}{f(x)} \right] \cdot f(x)^{g(x)}$$

RECTA TANGENTE A UNA CURVA

- **Caso elemental**

Recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisas x_0. Calculando la segunda coordenada del punto $y_0 = f(x_0)$ y la pendiente de la recta tangente $m = f'(x_0)$: $r_{Tangente}: y - y_0 = m(x - x_0)$

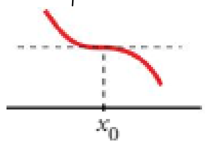
- **Conociendo su pendiente**

Resolvemos la ecuación $m = f'(x_0)$ cuya incógnita es la primera coordenada del punto, x_0, y después calculamos la segunda coordenada, y_0.

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO. EXTREMOS RELATIVOS

- $f(x)$ es **creciente** en un intervalo $(a, b) \Leftrightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$
- $f(x)$ es **decreciente** en un intervalo $(a, b) \Leftrightarrow f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b)$
- $f(x)$ es **derivable** y **creciente** en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$
- $f(x)$ es **derivable** y **decreciente** en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$
- Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ tiene un **máximo relativo** en el punto $(x_0, f(x_0))$
- Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ tiene un **mínimo relativo** en el punto $(x_0, f(x_0))$

OJO: f'(x₀)=0 pero no hay mínimo ni máximo: es un punto de inflexión



CURVATURA. PUNTOS DE INFLEXIÓN

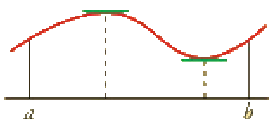
- f es **convexa** $\cup$ en $x_0 \Longrightarrow f´$ es **creciente** en $x_0 \Longrightarrow f´´(x_0) \geq 0$
- f es **cóncava** $\cap$ en $x_0 \Longrightarrow f´$ es **decreciente** en $x_0 \Longrightarrow f´´(x_0) \leq 0$
- f tiene un **punto de inflexión** en $x_0 \Longrightarrow f´´(x_0) = 0$ y $f´´´(x_0) \neq 0$

TEOREMA DE ROLLE

Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b).

Si $f(a) = f(b)$ entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Son puntos de tangente horizontal (máximos o mínimos relativos)



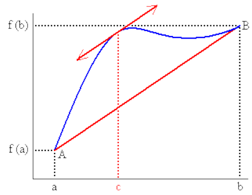
TEOREMAS: en TEORÍA de Selectividad

TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Es decir, habrá un punto intermedio c en el que la pendiente de la recta tangente sea igual a la pendiente del segmento $\overline{AB}$

Aplicaciones Teóricas Del Teorema Del Valor Medio

RECUERDA: pendiente (m)=f'(c)



- **Función constante**
  - f es continua en $[a, b]$
  - f es derivable en (a, b)
  - $f'(x) = 0$ en todos los puntos de (a, b)

  $\Longrightarrow f$ es constante en $[a, b]$
- **Función creciente en un punto**
  - f es derivable en un entorno de x_o
  - $f'(x_o) > 0$

  $\Longrightarrow f$ es creciente en x_o
- **Mínimo relativo**
  - $f'(x_o) = 0$
  - $f''(x_o) > 0$

  $\Longrightarrow$min relativo en x_o
- **Máximo relativo**
  - $f'(x_o) = 0$
  - $f''(x_o) < 0$

  $\Longrightarrow$máx relativo en x_o

TEOREMA DE CAUCHY

Si f y g son continuas en (a, b), entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$