INTEGRALES INMEDIATAS

1. PASOS GENERALES

- Sacar el número fuera de la integral (si nos conviene)
- Multiplicar la función de la integral por el número que nos haga obtener la derivada de la función junto a la función. Dividir también fuera de la integral por el mismo número.
- Aplicar la regla y obtener su integral.

2. POLINOMIOS

$$\boxed{\int k \cdot dx = kx + C} \qquad \boxed{\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C} \qquad \boxed{\int (a+b)\, dx = \int a\, dx + \int b\, dx}$$

- $\int \boldsymbol{(x^3 - 2)\, dx} = \int x^3 dx + \int (-2) dx = \frac{x^4}{4} - 2x + C$

3. POTENCIAS

OJO! La potencia tiene que ser distinta de -1

$$\boxed{\int [f(x)]^n \cdot f'(x) \cdot dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C}$$

- $\int \boldsymbol{7(3x+2)^5\, dx} = 7\int (3x+2)^5\, dx = \frac{7}{3}\int 3(3x+2)^5\, dx = \frac{7}{3}\frac{(3x+2)^6}{6} + C = \frac{7(3x+2)^6}{18} + C$

4. LOGARITMO NEPERIANO

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C} \qquad \boxed{\int \ln f(x) \cdot f'(x) dx = f(x) \cdot \ln f(x) - f(x) + C}$$

- $\int \boldsymbol{\frac{6}{5x-3} dx} = 6\int \frac{1}{5x-3} dx = \frac{6}{5}\int \frac{5}{5x-3} dx = \frac{6}{5}\ln|5x-3| + C$
- $\int \boldsymbol{\frac{-2}{3x+7} dx} = -2\int \frac{1}{3x+7} dx = \frac{-2}{3}\int \frac{3}{3x+7} dx = \frac{-2}{3}\ln|3x+7| + C$

OJO! Puedes "jugar" con los números, pero no con las x

5. EXPONENCIALES EN BASE e

$$\boxed{\int e^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot dx = e^{f(x)} + C}$$

- $\int \boldsymbol{5e^{2x}\, dx} = 5\int e^{2x}\, dx = \frac{5}{2}\int 2e^{2x}\, dx = \frac{5}{2}e^{2x} + C$
- $\int \boldsymbol{-5xe^{3x^2}\, dx} = -5\int x \cdot e^{3x^2}\, dx = -\frac{5}{6}\int 6x \cdot e^{3x^2}\, dx = -\frac{5}{6}e^{3x^2} + C$

6. EXPONENCIALES EN BASE a (DISTINTA DE e)

$$\boxed{\int a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C}$$

- $\int \boldsymbol{3x \cdot 2^{x^2}\, dx} = 3\int x \cdot 2^{x^2}\, dx = \frac{3}{2}\int 2x \cdot 2^{x^2}\, dx = \frac{3}{2}\frac{2^{x^2}}{\ln 2} + C$

CUIDADO con los signos!

7. TRIGONOMÉTRICAS: SENO Y COSENO

$$\boxed{\int sen[f(x)] \cdot f'(x)\, dx = -\cos[f(x)] + C} \qquad \boxed{\int \cos[f(x)] \cdot f'(x)\, dx = sen[f(x)] + C}$$

- $\int \boldsymbol{5\, sen(3x)\, dx} = 5\int sen(3x)\, dx = \frac{5}{3}\int 3 \cdot sen(3x)\, dx = -\frac{5}{3}\cos(3x) + C$
- $\int \boldsymbol{7x^2 \cdot \cos\{2x^3\}\, dx} = 7\int x^2 \cdot \cos(2x^3)\, dx = \frac{7}{6}\int 6x^2 \cdot \cos(2x^3)\, dx = \frac{7}{6}sen(2x^3) + C$

8. TRIGONOMÉTRICAS: TANGENTE

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \operatorname{tg} f(x) + C} \qquad \boxed{\int [1 + \operatorname{tg}^2 f(x)] \cdot f'(x)\, dx = \operatorname{tg} f(x) + C} \qquad \boxed{\int \frac{f'(x)}{1 + f(x)^2} dx = \operatorname{arctg} f(x) + C}$$

- $\int \boldsymbol{\frac{7}{\cos^2 x} dx} = 7\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = 7\, tg\, x + C$
- $\int \boldsymbol{4[1 + \operatorname{tg}^2(3x)]\, dx} = 4\int [1 + \operatorname{tg}^2(3x)]\, dx = \frac{4}{3}\int 3[1 + \operatorname{tg} 1\,(3x)]\, dx = \frac{4}{3}\operatorname{tg}(3x) + C$
- $\int \boldsymbol{\frac{2}{1+(2x)^2} dx} = arc\, tg(2x) + C$

INTEGRALES RACIONALES

1. CASO 1: Grado NUMERADOR ≥ Grado DENOMINADOR

- Hacer la división D(x) (numerador) y d(x) (denominador por el método "de toda la vida".

$$D(x) = d(x) \cdot C(x) + R(x)$$

- Dividir la expresión anterior entre d(x) y aplicar integración a ambos lados.

$$\int \frac{D(x)}{d(x)} = \int C(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{d(x)} dx$$

- $\int \frac{x+2}{x-2} \boldsymbol{dx} = \rightarrow \frac{x+2}{x-2} = 1 + \frac{4}{x-2}$

$$\begin{array}{r|l} x+2 & x-2 \\ \hline -x+2 & 1 \\ \hline 4 & \end{array}$$

$$\int \frac{x+2}{x-2} dx = \int 1 dx + \int \frac{4}{x-2} = x + 4 \int \frac{1}{x-2} = x + 4 \ln|x-2| + C$$

- $\int \frac{x^3-5x^2+3x}{x^3} \boldsymbol{dx} = \int \frac{x^3}{x^3} dx - \int \frac{5x^2}{x^3} dx + \int \frac{3x}{x^3} dx = \int 1 dx - 5 \int \frac{1}{x} dx + 3 \int \frac{1}{x^2} dx =$

$= x - 5\ln|x| + 3\frac{x^{-1}}{-1} + C = x - 5\ln|x| - \frac{3}{x} + C$

2. CASO 2: Grado NUMERADOR < Grado DENOMINADOR (Y CON RAICES REALES SIMPLES, QUE NO SE REPITEN)

- Comprobar si se puede hacer integración inmediata (numerador es derivada del denominador)
- Igualar a cero el denominador y buscar las raíces (resolver la ecuación)
- Expresar el integrando como suma de fracciones: $\frac{D(x)}{d(x)} = \frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)} + \cdots + \frac{N}{(x-x_n)}$
- Despejar y calcular A, B… N
  - Sacar mcm de la suma de fracciones y expresar como una sola
  - Eliminar denominadores a ambos lados de la igualdad
  - Despejar y calcular A, B, … N asignando valores a x.

    ¡RECUERDA! → Para despejar A le damos a x el valor x_1. Para despejar B le damos a x el valor x_2. Para despejar N le damos a x el valor x_n…
  - Sustituir los valores de A, B, … N y calcular las integrales inmediatas logarítmicas.

- $\int \frac{x+1}{x^2-3x} \boldsymbol{dx} = \rightarrow \frac{\boxed{x+1}}{x^2-3x} = \frac{x+1}{x(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} = \frac{\boxed{A(x-3)+Bx}}{x(x-3)} \rightarrow x+1 = A(x-3) + Bx$

Para hallar A → x=0 $\quad 0 + 1 = A(0-3) + B \cdot 0; \quad A = -1/3$

Para hallar B → x=3 $\quad 3 + 1 = A(3-3) + B \cdot 3; \quad B = 4/3$

$$\int \frac{x+1}{x^2-3x} dx = \int \frac{-1/3}{x} dx + \int \frac{4/3}{x-3} dx = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{x} dx + \frac{4}{3}\int \frac{1}{x-3} dx = -\frac{1}{3}\ln|x| + \frac{4}{3}\ln|x-3| + C$$

- $\int \frac{3x+4}{2x^3+x^2-2x-1} \boldsymbol{dx} = \rightarrow$ Aplicamos Ruffini y fórmula para resolver ecuaciones de 2º grado…

Las raíces son: $x_1 = 1, x_2 = -1$ y $x_3 = -1/2$.

¡CUIDADO! → Multiplicamos toda la descomposición por el coeficiente del grado mayor: en este caso 2 ($2x^3$)

$$\frac{3x+4}{2x^3+x^2-2x-1} = \frac{A}{2(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1/2)} = \frac{A(x+1)(x+{}^1/_2) + B2(x-1)(x+1/2) + C2(x-1)(x+1)}{2(x-1)(x+1)(x+1/2)} \rightarrow$$

$\rightarrow 3x + 4 = A(x+1)(x+{}^1/_2) + B2(x-1)(x+{}^1/_2) + C2(x-1)(x+1)$

Para A → x=1 $\quad 3 + 4 = A(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right) + B2(1-1)\left(1+\frac{1}{2}\right) + C2(1-1)(1+1) \rightarrow A = \frac{7}{3}$

Para B → x= -1 $\quad 3 + 4 = A(-1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right) + B2(-1-1)\left(-1+\frac{1}{2}\right) + C2(-1-1)(-1+1) \rightarrow B = \frac{1}{2}$

Para C → x= -1/2 $\quad 3 + 4 = A\left(-\frac{1}{2}+1\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + B2\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + C2\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}+1\right) \rightarrow C = -\frac{5}{3}$

$$\int \frac{3x+4}{2x^3+x^2-2x-1} dx = \int \frac{7/3}{2(x-1)} dx + \int \frac{1/2}{(x+1)} dx + \int \frac{-5/3}{\left(x+\frac{1}{2}\right)} dx = \frac{7}{6}\int \frac{1}{(x-1)} dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)} - \frac{5}{3}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)} dx =$$

$= \frac{7}{6}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{5}{3}\ln\left|x+\frac{1}{2}\right| + C$

3. **CASO 3: Grado NUMERADOR < Grado DENOMINADOR (Y CON RAICES REALES MÚLTIPLES, QUE SE REPITEN)**
   - Comprobar si se puede hacer integración inmediata (numerador es derivada del denominador)
   - Igualar a cero el denominador y buscar las raíces (resolver la ecuación)
   - Expresar el integrando como suma de fracciones
   - Para las raíces repetidas, deberemos dar a x un valor fácil para operar, que no esté repetido.

- $\int \frac{2x+3}{x^2-2x+1}dx = \rightarrow \frac{2x+3}{(x-1)(x-1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2} \rightarrow 2x+3 = A(x-1)+B$

  Para B → x=1 $\quad 2+3 = A(1-1)+B; \rightarrow B=5$ B ya sé lo que vale.

  Para A → x=0 $\quad 0+3 = A(0-1)+B; \rightarrow 3=-A+5; \quad A=2$ Para A elijo un valor "fácil"

  $$\int \frac{2x+3}{x^2-2x+1}dx = \int \frac{2}{(x-1)}dx + \int \frac{5}{(x-1)^2}dx = 2\int \frac{1}{(x-1)}dx + 5\int (x-1)^{-2}dx =$$

  $$2\ln|x-1| + 5\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C = 2\ln|x-1| - \frac{5}{(x-1)} + C$$

- $\int \frac{2x+5}{(x+3)^3}dx = \rightarrow \frac{2x+5}{(x+3)^3} = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{C}{(x+3)^3} = \frac{A(x+3)^2+B(x+3)+C}{(x+3)^3} \rightarrow 2x+5 = A(x+3)^2 + B(x+3) + C$

  Para C → x=-3 $\quad 2(-3)+5 = C; \rightarrow C=-1$

  Para B → x=0 $\quad 0+5 = 9A+3B-1;$

  Para A → x=-1 $\quad 2(-1)+5 = 4A+2B-1;$ $\rightarrow$ *Sistema de ecuaciones*: $A=0; \; B=2$

INTEGRALES POR PARTES

$$\boxed{\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du}$$

Sentada un día vi una vaca sin rabo vestida de uniforme

Regla para identificar quién es u y quién es dv. Elegiremos como u la función que aparezca 1º en ALPES.

ALPES

Arcos → Logaritmos → Polinomios → Exponenciales → Senos, cosenos

- Identificar quién es u y quién es dv
- Determinar du y v
- Aplicamos la fórmula

- $\int (x+2)\cos x\,dx \rightarrow ALPES: \; u=(x+2); \; dv = \cos x\,dx$

  $du = 1\,dx; \quad v = sen\,x$

  $$\int (x+2)\cdot\cos x\,dx = (x+2)\cdot senx - \int senx\cdot 1\,dx = (x+2)senx + cosx + C$$

- $\int x\cdot e^{2x}dx = \rightarrow \quad ALPES: \quad u=x; \quad dv = e^{2x}$

  $du = 1\,dx; \quad v = \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int 2\,e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}$

  $$\int x\cdot e^{2x}dx = x\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\,1\,dx = x\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2\cdot 2}\int 2\,e^{2x}\,dx = x\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

- $\int \cos^2 x\,dx = \int \cos x\cos x\,dx \rightarrow \quad ALPES: \quad u=\cos x\,; dv = \cos x\,; \quad du = -senx; \; v = senx$

  Caso Especial: Integral CÍCLICA

  $$\int \cos^2 x\,dx = \cos x\,senx - \int senx(-senx)dx = \cos x\,senx + \int sen^2 x\,dx =$$

  $$\boxed{\int \cos^2 x\,dx =} \cos x\,senx + \int (1-\cos^2 x)\;dx = \cos x\,senx + \int dx - \boxed{\int \cos^2 x\;dx} \rightarrow$$

  $$\int \quad = \cos x\,senx + x - \int \quad \rightarrow 2\int \quad = \cos x\,senx + x \rightarrow \boxed{\int \cos^2 x\,dx = \frac{\cos x\,senx + x}{2} + C}$$

INTEGRALES POR CAMBIO DE VARIABLE

EN EL INTEGRANDO HAY:	CAMBIO SUGERIDO	
Raíces cuadradas	$t=\sqrt{()}$	
Raíces NO cuadradas	$t=\sqrt[m]{()}$	m como el mcm de los índices de las raíces
Func. Exponenciales	$t=e^{nx}$	n el menor índice de los exponentes
Fun. Logarítmicas	$t=\ln x$ si aparece sólo x $t=(lo\ de\ dentro\ del\ log)$ si el logaritmo es de un polinomio	

- Elegir el cambio de variable
- Despejar x
- Derivar a ambos lados de la igualdad
- Sustituir los términos obtenidos en la integral original y ordenarlos (si lo hemos hecho bien, desaparece x y la integral dependerá solo de t)
- Resolver la integral con los métodos conocidos
- Deshacer el cambio de variable volviendo a sustituir t en la integral ya resuelta

- $\int x\sqrt{x+3}\,dx \;\rightarrow\; \boxed{t=\sqrt{x+3}};\quad t^2=x+3;\quad \boxed{x=t^2-3};$

  Derivamos respecto de x a la izquierda, y respecto de t a la derecha

  $(x)'=(t^2-3)';\quad \boxed{1\,dx=2t\,dt}$

  $\int x\sqrt{x+3}\,dx=\int(t^2-3)\cdot t\cdot 2t\,dt=\int 2(t^4-3t^2)dt=2\int(t^4-3t^3)dt=$

  $=2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{3t^3}{3}\right)+C=\frac{2t^5}{5}-2t^3+C$

  $$\int x\sqrt{x+3}\,dx=\frac{2t^5}{5}-2t^3+C=\frac{2\left(\sqrt{x+3}\right)^5}{5}-2\left(\sqrt{x+3}\right)^3+C$$

  IMPORTANTE! Deshacer el cambio de variable

- $\int x\ln(x^2-5)dx \;\rightarrow\; \boxed{t=x^2-5};\quad \boxed{x=\sqrt{t+5}};\;\rightarrow\;(x)'=\left(\sqrt{t+5}\right)';\quad 1\,dx=\frac{1}{2\sqrt{t+5}}\,dt$

  $$\int\sqrt{t+5}\cdot\ln t\cdot\frac{1}{2\sqrt{t+5}}dt=\frac{1}{2}\int\ln t\cdot 1\,dt=\frac{1}{2}[t\cdot\ln t-t]+C=$$

  $$=\frac{(x^2-5)\cdot\ln(x^2-5)}{2}-\frac{(x^2-5)}{2}+C$$

- $\int x\ln(x^2-5)dx=\frac{1}{2}\int 2x\ln(x^2-5)dx=\frac{1}{2}[(x^2-5)\cdot\ln(x^2-5)-(x^2-5)]+C=$

  $$=\frac{(x^2-5)\cdot\ln(x^2-5)}{2}-\frac{(x^2-5)}{2}+C$$

  Es el mismo, pero de una forma "directa", si nos damos cuenta

PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN

Una función tiene infinitas primitivas, que se diferencian entre sí por la constante.

Encuentra la función primitiva de $y=x^2+2x$ que pase por el punto $(1,3)$.

$$\int(x^2+2x)\,dx=\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}+C=\frac{x^3}{3}+x^2+C\quad\rightarrow\quad y=\frac{x^3}{3}+x^2+C$$

$$3=\frac{1^3}{3}+1^2+C\quad\rightarrow\quad C=\frac{5}{3}$$

$$\boxed{y=\frac{x^3}{3}+x^2+\frac{5}{3}}$$

En la primitiva, sustituyo los valores del punto para calcular C