DISTRIBUCIONES DE LA PROBABILIDAD

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DE VARIABLE DISCRETA

Resultado de asignar a cada valor de la variable x_i su probabilidad p_i
Cada p_i es un nº entre 0 y 1: $0 \leq p_i \leq 1$. La suma de todos los p_i es 1

Parámetros: similares a los de las distribuciones estadísticas:

- MEDIA: $\mu: \sum p_i x_i$
- VARIANZA: $\sigma^2 = \sum p_i x_i^2 - \mu^2$
- DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{\sum p_i x_i^2 - \mu^2}$

LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL *B(n,p)*

Al suceso *A* se llama **éxito,** y a su probabilidad $P[A] = p$
Probabilidad de su contrario: $P[A'] = 1 - p = q$

Se repite *n* veces esa experiencia y nos preguntamos el nº de éxitos (x)
La distribución de probabilidad de la variable x es la distribución binomial y se designa $B(n, p)$

$p = P[A]$: probabilidad de éxito
n: nº de veces que se repite la experiencia

Si x es una variable con distribución $B(n, p)$, la probabilidad $P[x = k]$ de tener k éxitos es:

$$\boxed{P[x = k] = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}}$$

- MEDIA: $\mu = np$
- DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{npq}$

RECUERDA

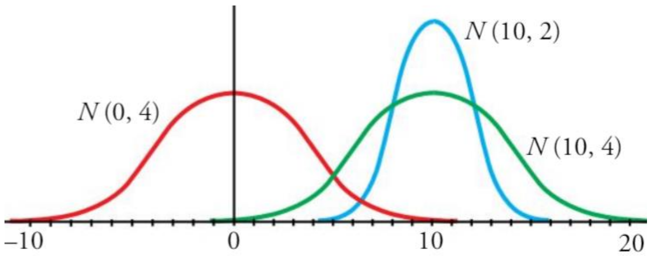
$$C_5^3 = \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10; \quad \binom{m}{0} = 1; \quad \binom{m}{1} = m$$

Con la Calculadora:

5 SHIFT ÷ 3 = "5C3" en pantalla: buscar función "nCr"

LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

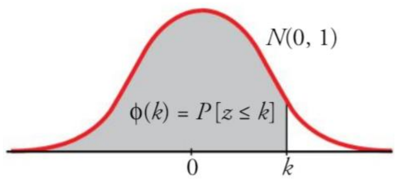
La curva normal es una función de probabilidad continua y simétrica, cuyo máximo coincide con la media, μ. Para cada valor de μ y σ (desviación típica), hay una curva normal, que se designa $N(\mu, \sigma)$



Parecen distintas, pero el reparto de probabilidades en ellas es prácticamente idéntico. Sólo depende de μ y de σ

- **TABLA DE ÁREAS BAJO LA CURVA NORMAL *N (0,1)***

En la distribución N (0,1) a la variable se le designa la letra z. La tabla da las probabilidades $P[z \leq k]$ para valores de k de 0 a 3,99 → $P[z < k] = \phi(k)$



- **CÁLCULO DE PROBABILIDADES EN UNA DISTRIBUCIÓN *N (0,1)***
  - Si k≥0, las probabilidades $P[z \leq k] = P[z < k] = \phi(k)$ las da directamente la tabla
  - $P[z \geq k] = 1 - P[z < k] = 1 - \phi(k)$
  - Para abscisas negativas (recuerda: curva simétrica): $P[z \leq -k] = P[z \geq k] = 1 - \phi(k)$

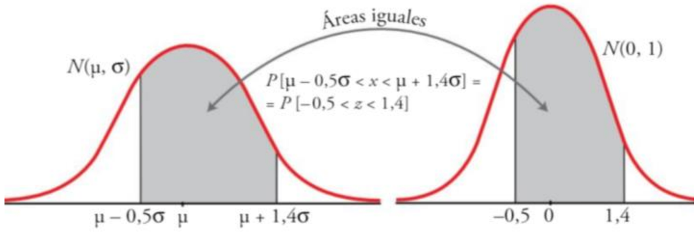
Las restantes probabilidades se pueden obtener a partir de estas:

$$P[z \geq 1{,}73] = 1 - P[z < 1{,}73] = 1 - \phi(1{,}73) = 1 - 0{,}9582 = 0{,}0418$$

- **CÁLCULO DE PROBABILIDADES EN UNA DISTRIBUCIÓN *N (μ, σ)***

Para calcular probabilidades en una distribución *N (μ, σ)* se relaciona con *N (0, 1)*

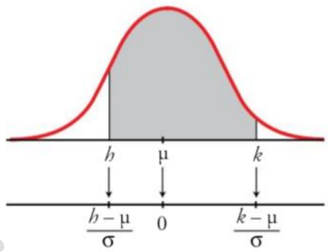
Hay que expresar los extremos de los intervalos en *nº de desviaciones típicas que se separan de la media* → **tipificar la variable.**



Si x es *N (μ, σ)* → $P[h < x < k] = P\left[\frac{h-\mu}{\sigma} < z < \frac{k-\mu}{\sigma}\right]$

El cambio $k \rightarrow \frac{h-\mu}{\sigma}$ se llama **tipificación de la variable**.

La variable ya tipificada, z, sigue una distribución *N(0, 1)*



NOTA: Observa que hemos llamado "*x*" a la variable de una distribución *N (μ, σ)* cualquiera, y "*z*" a la variable de la distribución *N (0, 1)*. Así lo haremos siempre.

APROXIMACIÓN BINOMIAL A LA NORMAL

Cuando np y nq son ambos mayores que 3, la aproximación es bastante buena. Y si superan a 5, la aproximación es casi perfecta.
La curva normal a la que se aproxima tiene la misma media y la misma desviación típica que la binomial, es decir:

$$\boldsymbol{\mu = np \qquad \sigma = \sqrt{npq}}$$

Si x es $B(n,p)$ y se parece mucho a x', $N(np, \sqrt{npq})$, el cálculo de probabilidades de x puede hacerse a partir de x' del siguiente modo:

$$\boxed{P(y \le k) = P(x \le k + 0{,}5)}$$

← REFERENCIA.
Si hacemos 1 cambio al <= cambia el sigo del 0,5 a –
Si hacemos 2 cambios, queda +

$$P(y < k) = P(x \le k - 0{,}5)$$
$$P(y \ge k) = P(x \ge k - 0{,}5)$$
$$P(y > k) = P(x \ge k + 0{,}5)$$
$$P(y = k) = P(k - 0{,}5 \le x \le k + 0{,}5)$$

Ejercicios resueltos

1 *En una distribución B(200; 0,3), calcular P[x ≥ 70].*

$\left.\begin{array}{l}\mu = 200 \cdot 0{,}3 = 60 \\ \sigma = \sqrt{200 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} = 6{,}48\end{array}\right\}$ Ya vemos que $np > 5$ y es claro que nq también.

x es $B(200; 0{,}3) \rightarrow x'$ es $N(60; 6{,}48) \rightarrow z$ es $N(0, 1)$

$P[x \ge 70] = P[x' > 69{,}5] = P\left[z > \frac{69{,}5 - 60}{6{,}48}\right] = P[z > 1{,}47] =$

$= 1 - P[z \le 1{,}47] = 1 - \phi(1{,}47) = 0{,}0708$

2 *El 2 % de los tornillos fabricados por una máquina presentan defectos. En un lote de 2 000 tornillos, ¿cuál es la probabilidad de que haya menos de 50 defectuosos?*

Es una binomial $B(2\,000; 0{,}02)$, con $\mu = np = 40$ y $\sigma = \sqrt{npq} = 6{,}26$.

Ya vemos que $np = 40 > 5$ y también $nq > 5$. Por tanto, podemos asegurar que se aproxima a la normal $N(40; 6{,}26)$.

x es $B(2\,000; 0{,}02) \rightarrow x'$ es $N(40; 6{,}26) \rightarrow z$ es $N(0, 1)$

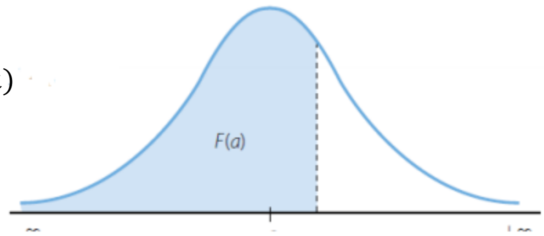
$P[x < 50] = P[x' \le 49{,}5] = P\left[z \le \frac{49{,}5 - 40}{6{,}26}\right] = P[z \le 1{,}52] =$

$= \phi(1{,}52) = 0{,}9357$

La probabilidad pedida es 0,9357.

TABLA DE DISTRIBUCIÓN NORMAL, N(0,1)

$F(a) = P(Z \leq a)$



a	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000