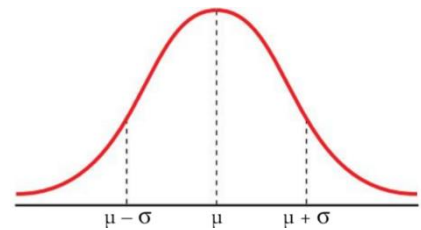


## LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

### 1. LA CURVA NORMAL

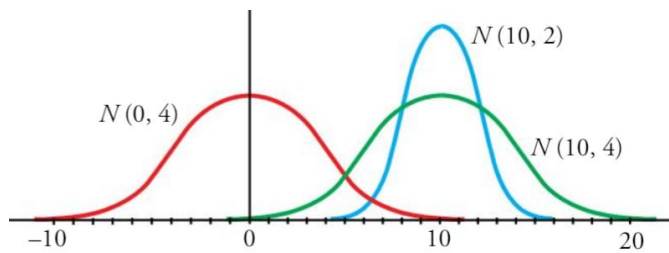
La curva normal es una función de probabilidad continua y simétrica, cuyo máximo coincide con la media,  $\mu$ . Por su forma acampanada y el matemático que la describió, se llama campana de Gauss



Para cada valor de  $\mu$  (media) y cada valor de  $\sigma$  (desviación típica), hay una curva normal, que se designa  $N(\mu, \sigma)$

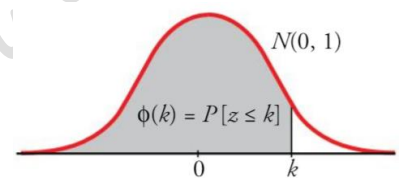
Por ejemplo, las distribuciones  $N(0,4)$ ,  $N(10,4)$  y  $N(10,2)$

Parecen distintas, pero el reparto de probabilidades en ellas es prácticamente idéntico. Sólo depende de  $\mu$  y de  $\sigma$



### 2. TABLA DE ÁREAS BAJO LA CURVA NORMAL $N(0,1)$

Para facilitar expresiones, en la distribución  $N(0,1)$  a la variable se le designa la letra  $z$ . La tabla los da las probabilidades  $P[z \leq k]$  para valores de  $k$  de 0 a 3,99.



$$P[z < k] = \phi(k)$$

#### Ejercicios propuestos

2 Halla las siguientes probabilidades:

- |                     |                  |
|---------------------|------------------|
| a) $P[z \leq 0,84]$ | b) $P[z < 1,5]$  |
| c) $P[z < 2]$       | d) $P[z < 1,87]$ |
| e) $P[z < 2,35]$    | f) $P[z \leq 0]$ |
| g) $P[z < 4]$       | h) $P[z = 1]$    |

3 Di el valor de  $k$  en cada caso:

- |                           |                        |
|---------------------------|------------------------|
| a) $P[z \leq k] = 0,7019$ | b) $P[z < k] = 0,8997$ |
| c) $P[z \leq k] = 0,5040$ | d) $P[z < k] = 0,7054$ |

4 Di el valor aproximado de  $k$  en cada caso:

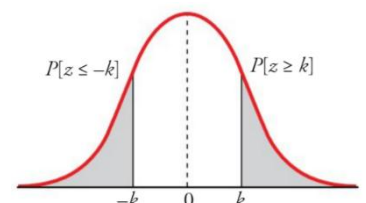
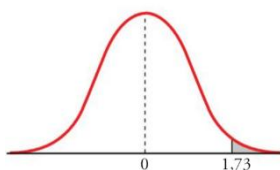
- |                        |                         |
|------------------------|-------------------------|
| a) $P[z < k] = 0,9533$ | b) $P[z \leq k] = 0,62$ |
|------------------------|-------------------------|

### 3. CÁLCULO DE PROBABILIDADES EN UNA DISTRIBUCIÓN $N(0,1)$

- Si  $k \geq 0$ , las probabilidades  $P[z \leq k] = P[z < k] = \phi(k)$  se encuentra directamente en las tablas
- $P[z \geq k] = 1 - P[z < k] = 1 - \phi(k)$
- Para abscisas negativas (recuerda que la curva es simétrica)  
 $P[z \leq -k] = P[z \geq k] = 1 - \phi(k)$

Las restantes probabilidades se pueden obtener a partir de estas, como se ve en los ejemplos:

$$P[z \geq 1,73] = 1 - P[z < 1,73] = 1 - \phi(1,73) = 1 - 0,9582 = 0,0418$$



#### Ejercicios propuestos

5 Halla:

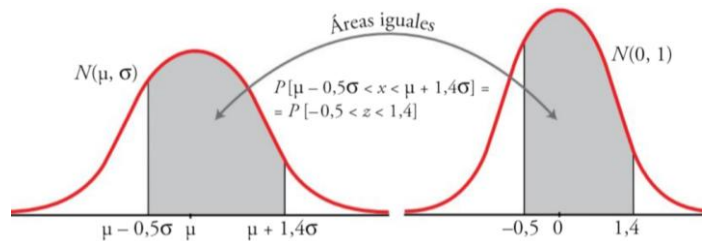
- |                         |                          |                  |
|-------------------------|--------------------------|------------------|
| a) $P[z > 1,3]$         | b) $P[z < -1,3]$         | c) $P[z > -1,3]$ |
| d) $P[1,3 < z < 1,96]$  | e) $P[-1,96 < z < -1,3]$ |                  |
| f) $P[-1,3 < z < 1,96]$ | g) $P[-1,96 < z < 1,96]$ |                  |

6 Halla, a partir de la tabla, las siguientes probabilidades:

- |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|
| a) $P[-1 \leq z \leq 1]$ | b) $P[-2 \leq z \leq 2]$ |
| c) $P[-3 \leq z \leq 3]$ | d) $P[-4 \leq z \leq 4]$ |
| e) $P[0 \leq z \leq 1]$  | f) $P[0 \leq z \leq 4]$  |

#### 4. CÁLCULO DE PROBABILIDADES EN UNA DISTRIBUCIÓN $N(\mu, \sigma)$

Las probabilidades en dos distribuciones normales cualesquiera se reparten de forma similar. Por tanto, para calcular probabilidades en una distribución  $N(\mu, \sigma)$  se relaciona con  $N(0, 1)$



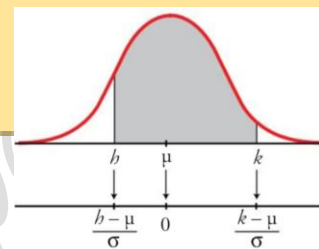
Para establecer la relación con  $N(0, 1)$  habrá que expresar los extremos de los intervalos en número de desviaciones típicas que se separan de la media. Esto es **tipificar la variable**.

Si  $x$  es  $N(\mu, \sigma)$ , para calcular la probabilidad  $P[h < x < k]$  se procede del siguiente modo:

$$P[h < x < k] = P\left[\frac{h-\mu}{\sigma} < z < \frac{k-\mu}{\sigma}\right]$$

El cambio  $k \rightarrow \frac{h-\mu}{\sigma}$  se llama **tipificación de la variable**.

La variable ya tipificada,  $z$ , sigue una distribución  $N(0, 1)$ .



**NOTA:** Observa que hemos llamado  $x$  a la variable de una distribución  $N(\mu, \sigma)$  cualquiera, y  $z$  a la variable de la distribución  $N(0, 1)$ . Así lo haremos siempre.

#### Ejercicio propuesto

7 En una distribución  $N(173, 6)$ , halla las siguientes probabilidades:

a)  $P[x \leq 173]$

b)  $P[x \geq 180,5]$

c)  $P[174 \leq x \leq 180,5]$

e)  $P[161 \leq x \leq 170]$

g)  $P[x > 191]$

d)  $P[161 \leq x \leq 180,5]$

f)  $P[x = 174]$

h)  $P[x < 155]$

#### 2. Manejo de la tabla de la $N(0, 1)$

En una distribución normal  $N(0, 1)$ , calcular las siguientes probabilidades:

a)  $P[z \leq 1,2]$

b)  $P[z \geq 1,15]$

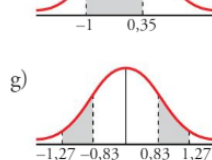
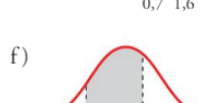
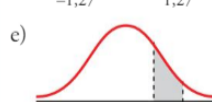
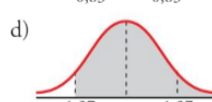
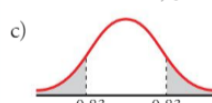
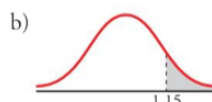
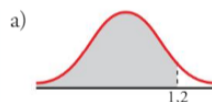
c)  $P[z \leq -0,83]$

d)  $P[z > -1,27]$

e)  $P[0,7 < z < 1,6]$

f)  $P[-1 < z < 0,35]$

g)  $P[-1,27 < z < -0,83]$



Se obtiene directamente en las tablas.

$$P[z \leq 1,2] = \Phi(1,2) = 0,8849$$

$z \geq 1,15$  es lo contrario de  $z < 1,15$

$$P[z \geq 1,15] = 1 - P[z < 1,15] = 1 - \Phi(1,15) = 1 - 0,8749 = 0,1251$$

Se resuelve por simetría.

$$P[z \leq -0,83] = P[z > 0,83] = 1 - P[z \leq 0,83] = 1 - \Phi(0,83) = 1 - 0,7967 = 0,2033$$

Se resuelve por simetría.

$$P[z > -1,27] = P[z \leq 1,27] = \Phi(1,27) = 0,8980$$

Es la diferencia de dos probabilidades que se obtienen directamente de las tablas.

$$P[0,7 < z < 1,6] = P[z \leq 1,6] - P[z \leq 0,7] = \Phi(1,6) - \Phi(0,7) = 0,9452 - 0,7580 = 0,1872$$

Es la diferencia de dos probabilidades: una de ellas se obtiene en las tablas y la otra se resuelve por simetría.

$$P[-1 < z < 0,35] = P[z \leq 0,35] - (1 - P[z \leq 1]) = \Phi(0,35) - [1 - \Phi(1)] = 0,6368 - 1 + 0,8413 = 0,4781$$

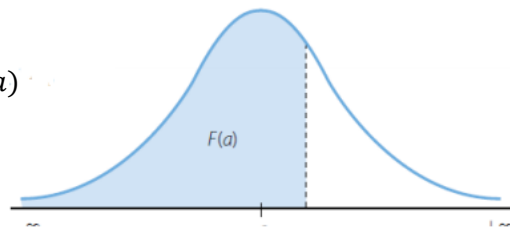
Se resuelve por simetría.

$$P[-1,27 < z < -0,83] = P[0,83 < z < 1,27] = P[z \leq 1,27] - P[z \leq 0,83] = \Phi(1,27) - \Phi(0,83) = 0,8980 - 0,7967 = 0,1013$$

**Hazlo tú.** Calcula  $P[-0,83 < z < 0,83]$ .

**TABLA DE DISTRIBUCIÓN NORMAL, N(0,1)**

$$F(a) = P(Z \leq a)$$



| a   | 0      | 0,01   | 0,02   | 0,03   | 0,04   | 0,05   | 0,06   | 0,07   | 0,08   | 0,09   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| 3,0 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9990 |
| 3,1 | 0,9990 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9993 | 0,9993 |
| 3,2 | 0,9993 | 0,9993 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 |
| 3,3 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9997 |
| 3,4 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9998 |
| 3,5 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 |
| 3,6 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,7 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,8 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,9 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |