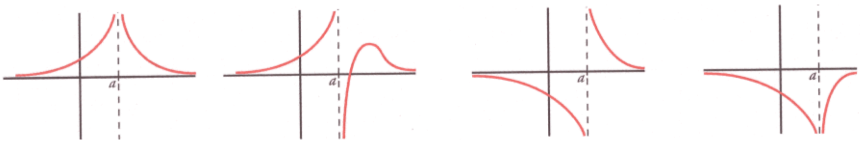
LÍMITES Y CONTINUIDAD

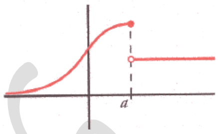
1. CONTINUIDAD DE FUNCIONES A PARTIR DE LA GRÁFICA

Una función puede ser discontinua en un punto por la

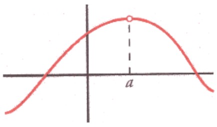
- **Tiene ramas infinitas en ese punto (discontinuidad infinita)**
  La recta $x = a$ se llama asíntota vertical de la curva.

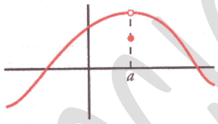


- **Presenta un salto en ese punto (discontinuidad de salto finito)**
  Entre las funciones elementales que manejamos, esta discontinuidad sólo se da en funciones definidas "a trozos".



- **Le falta punto o punto desplazado (ambas, discontinuidad evitable)**





2. LÍMITES DE FUNCIONES EN UN PUNTO A PARTIR DE LA GRÁFICA

- x → c (**x tiende a c**): x toma valores cada vez más próximos a c
- x → c⁻ (**x tiende a c por la izda**): x toma valores cada vez + próximos a c, todos **menores** que c
- x → c⁺ (**x tiende a c por la drch**): x toma valores cada vez + próximos a c, todos **mayores** que c
- $\lim_{x\to c} f(x)$ significa "*a qué valores se acerca* $y = f(x)$ *cuando x toma valores próximos a c*"
- Si $\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = l$, decimos que $\lim_{x\to c} f(x) = l$

Igualmente, cuando los límites laterales son ambos $+\infty$ o ambos $-\infty$.
Si los dos límites laterales no toman el mismo valor, se dice que **no existe** $\lim_{x\to c} f(x)$

3. CÁLCULO DEL LÍMITE EN UN PUNTO EN EL QUE LA FUNCIÓN ES CONTÍNUA

Si $f(x)$ es una función continua en $x = c$, entonces sencillamente $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

4. CÁLCULO DEL LÍMITE EN UN PUNTO EN FUNCIONES DEFINIDAS "A TROZOS"

Si $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x < c \\ f_2(x), & x \geq c \end{cases}$ con f_1 y f_2 funciones continuas, para hallar el límite en un punto hacemos:

- **En el punto de ruptura** (en $x = c$)
  Hallamos los límites laterales: $\lim_{x\to c^-} f(x) = f_1(c)$; $\lim_{x\to c^+} f(x) = f_2(c)$
  Si coinciden, este es el valor de $\lim_{x\to c} f(x)$. Si no coinciden, el límite en $x = c$ no existe.
- **En otro punto cualquiera del dominio** (en $x = a$, con $a \neq c$)
  $\lim_{x\to a} f(x) = f_1(a)$ si $a < c$; $\lim_{x\to a} f(x) = f_2(a)$ si $a > c$

5. LÍMITE EN UN PUNTO DEL COCIENTE DE DOS POLINOMIOS P(x)/Q(x)

Al calcular $\lim_{x\to c} \frac{P(x)}{Q(x)}$ podemos encontrarnos con uno de estos tres casos:

- Si $Q(c) \neq 0$, entonces $\lim_{x\to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$

$$Ejemplo: \lim_{x\to 1} \frac{2x}{x+1} = \frac{2\cdot 1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

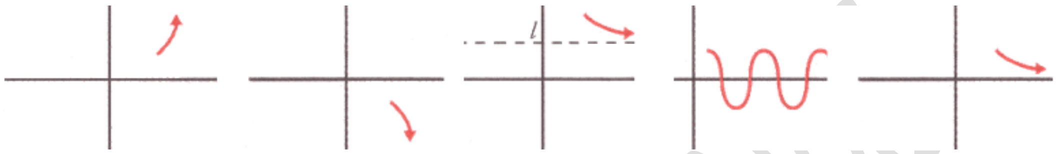
- Si $P(c) \neq 0$ y $Q(c) = 0$, entonces $\lim_{x\to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$ (hallamos los límites laterales)

$$Ejemplo: \lim_{x\to 1} \frac{2x}{x-1} = \frac{2}{1-1} = \frac{2}{0} = \infty \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} \frac{2\cdot 0{,}9}{0{,}9-1} = \frac{+}{-} = -\infty \\ \lim_{x\to 1^+} \frac{2\cdot 1{,}1}{1{,}1-1} = \frac{+}{+} = +\infty \end{cases}$$

- Si $P(c)=0$ y $Q(c)=0$, entonces $\lim\limits_{x\to c}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim\limits_{x\to c}\frac{(x-c)P_1(x)}{(x-c)Q_1(x)}=\lim\limits_{x\to c}\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$
  Para hallar este nuevo límite, analizamos de nuevo en cuál de los tres casos se encuentra.
  $$Ej:\ \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x^2-1}=\frac{0}{0}=Ind.\to \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x+1)}=\frac{0}{2}=0$$

6. CÁLCULO DE LÍMITES CUANDO x→+∞ O x→-∞. FUNCIONES POLINÓMICAS E INVERSAS DE LAS POLINÓMICAS

- Para expresar que x toma valores cada vez más grandes, ponemos $x\to\infty$
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ significa "a qué valor se acerca $y=f(x)$ cuando x toma valores cada vez más grandes"
- Cuando $x\to+\infty$ puede ocurrir una de estas posibilidades:



$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=l$ $\quad\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\nexists$ $\quad\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{f.\ polinómica}=0$

- Los resultados son similares cuando $x\to-\infty$

7. CÁLCULO DE LÍMITES CUANDO x→+∞ O x→-∞. FUNCIONES RACIONALES P(x)/Q(x)

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{ax^m+\cdots}{bx^n+\cdots}$$

- Si grado de $P>$ grado Q, $(m>n)$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\pm\infty$ (el signo es el de $\frac{a}{b}$)
  $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{2x+1}=+\infty$ (el signo + $\to\frac{+4}{+2}=+$) $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^2}{2x+1}=-\infty$ (el signo - $\to\frac{+4}{-2}=-$)
- Si grado de $P<$ grado Q, $(m<n)$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$
  $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x}{2x^2+1}=0 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x}{2x^2+1}=0$
- Si grado de $P=$ grado Q, $(m=n)$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\frac{a}{b}$
  $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x}{2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x}{2x}=\frac{4}{2}=2 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x}{2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x}{2x}=\frac{4}{2}=2$

Cuando $x\to-\infty$, se resuelve de forma similar a $x\to+\infty$, teniendo en cuenta los signos.

8. CONTINUIDAD DE FUNCIONES A PARTIR DE SU EXPRESIÓN ANALÍTICA

- Una función es continua en $x=c$ cuando $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$, y es un número finito.
- **Tipos de discontinuidad:**
  - Si alguno de los límites laterales (o los dos) son infinitos:
    $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$ y/o $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$, entonces:
    $f(x)$ tiene una discontinuidad infinita en $x=a$ (asíntota vertical en $x=a$)
  - Si existen y son finitos los límites laterales, pero no coinciden:
    $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ → no existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, entonces:
    $f(x)$ tiene una discontinuidad de salto finito en $x=a$
  - Si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$, es decir, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$, y $f(a)\neq l$, entonces:
    $f(x)$ tiene una discontinuidad evitable en $x=a$