Matemáticas II

2º Bachillerato

Baúl de Ciencias

ÍNDICE

LIMITES

INDETERMINACIONES MÁS IMPORTANTES

$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	$\frac{0}{0}$	$(\pm\infty)\cdot 0$
$(+\infty)-(+\infty)$	$(+\infty)+(-\infty)$	$(+\infty)^0$
0^0	$1^{+\infty}$	$1^{-\infty}$

1. COMPARACIÓN DE INFINITOS CUANDO $x \to \pm\infty$

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\pm\infty$, entonces $f(x)$ es un infinito de orden superior a $g(x)$ si

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$, o lo que es lo mismo, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=0$

Los órdenes de los infinitos en general se clasifican:

Función EXPONENCIAL (base mayor que 1) > POTENCIAS > LOGARITMOS

2. CÁLCULO DE LÍMITES CUANDO $x \to +\infty$

- **Cociente de polinomios $P(x)/Q(x)$**

Con $f(x)=\frac{ax^p+\cdots}{bx^q+\cdots}\approx\frac{a}{b}x^{(p-q)}$

- o Grado $P(x)>Q(x)$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ (el signo depende de $\frac{a}{b}$)
- o Grado $P(x)<Q(x)$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$
- o Grado $P(x)=Q(x)$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{a}{b}$

- **Diferencia de expresiones infinitas**
  - o Se aprecia a simple vista: La resta son infinitos de orden distinto: directamente $-\infty,+\infty$
  - o Puede hacerse la operación: Si no se ve directamente, se resta y se calcula el límite.
  - o Si hay raíces cuadradas:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{[f(x)-g(x)][f(x)+g(x)]}{f(x)+g(x)}=\frac{f(x)^2-g(x)^2}{f(x)+g(x)}$$

Conviene saberse esta fórmula

- **Límites inmediatos relacionados con el número e**

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\,;\quad \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\frac{1}{e}=e^{-1}$$

Con ello podemos deducir otros límites:

- o $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{-1}=e^{-1}$
- o $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}=\to$ haciendo $2x=y\to\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=e$
- o $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^a=e^a\to\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{ax}=e^{-a}$
- o $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax+b}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^b=e^a\cdot 1=e^a$
- o $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x/k}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x/k}\right)^{x/k}\right]^k=e^k$

- **Expresiones del tipo 1^∞**

Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=+\infty$, entonces: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-1]\cdot g(x)}$

3. CÁLCULO DE LÍMITES CUANDO $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(-x)$$

¡CUIDADO! $\sqrt[2]{-\infty}=\nexists;\ \sqrt[3]{-\infty}=-\infty$

MUCHO OJITO
$\ln \infty = \infty$
$\ln e = 1$
$\ln 1 = 0$
$\ln 0 = -\infty$
$\ln -\infty = \nexists$

4. LÍMITE EN UN PUNTO

- **Cociente de polinomios**
  - $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x}{x+1} = \frac{2\cdot 1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$
  - $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x}{x-1} = \frac{2}{1-1} = \frac{2}{0} = \infty \to$ *Límites laterales*: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{2\cdot 0{,}9}{0{,}9-1} = \frac{+}{-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2\cdot 1{,}1}{1{,}1-1} = \frac{+}{+} = +\infty \end{cases}$
  - $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x^2-1} = \frac{0}{0} = Indt \to \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)}{(x+1)} = \frac{0}{2} = 0$
- **Diferencias, indeterminación** $(+\infty - \infty)$
  - Realizamos la operación resta, y calculamos el límite sobre el resultado.
- **Expresiones del tipo $1^{+\infty}$**

  Si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to c} g(x) = +\infty$, entonces: $\lim\limits_{x\to c} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to c}[f(x)-1]\cdot g(x)}$

5. REGLA DE L'HÔPITAL

¡Muy importante esta regla!

Sean f y g dos funciones derivables en un entorno del punto a:

$$\text{Si } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ ó } = \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \text{ y } \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k, \text{ entonces } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$$

Si al aplicar la regla volvemos a tener una indeterminación, podemos repetir el proceso.
Algunas expresiones $(\infty - \infty)$ o 1^∞ se pueden expresar en forma de cociente para aplicar L'Hôpital.

SUMA $\quad lim[f(x) + g(x)] = \lim f(x) + \lim g(x)$

$k + 0 = k$	$k + \infty = \infty$	$0 + \infty = \infty$
$\infty + 0 = \infty$	$\infty + k = \infty$	$\infty + \infty = \infty$

DIFERENCIA $\quad lim[f(x) - g(x)] = \lim f(x) - \lim g(x)$

$-\infty - \infty = -\infty$	$k - \infty = -\infty$	$0 - \infty = -\infty$
$\infty - 0 = \infty$	$\infty - k = \infty$	$+\infty - \infty = Indet.$

PRODUCTO $\quad lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

$0 \cdot 0 = 0$	$0 \cdot k = 0$	$0 \cdot \infty = Indet.$
$\infty \cdot 0 = Indet.$	$\infty \cdot k = \infty \ (k \neq 0)$	$\infty \cdot \infty = \infty$

COCIENTES $\quad lim[f(x)/g(x)] = \lim f(x) / \lim g(x)$

$0/0 = Indet.$	$0/k = 0$	$0/\infty = 0$
$k/0 = Indet.$ =Límites laterales	$k/k = 1$	$k/\infty = 0$
$\infty/0 = \infty$	$\infty/k = \infty$	$\infty/\infty = Indet.$

POTENCIAS $\quad \lim f(x)^{g(x)} = \lim f(x)^{lim\, g(x)} \quad (si\ f(x) > 0)$

$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$		$(+\infty)^{-\infty} = 0$		$(-\infty)^{-\infty} = \nexists$
$Si\ k < 0 \ \to$	$k^0 = 1$	$k^{+\infty} = \nexists$	$k^{-\infty} = \nexists$	$(+\infty)^k = 0$
$Si\ k = 0$	$0^0 = Indet.$	$0^\infty = 0$	$0^{-\infty} = \pm\infty$	$\infty^0 = Indet.$
$Si\ 0 < k < 1 \ \to$	$k^0 = 1$	$k^{+\infty} = 0$	$k^{-\infty} = +\infty$	$(+\infty)^k = +\infty$
$Si\ 1 < k \ \to$	$k^0 = 1$	$k^{+\infty} = +\infty$	$k^{-\infty} = 0$	$(+\infty)^k = +\infty$
$Si\ k = 1 \ \to$	$1^0 = 1$	$1^{+\infty} = Indet.$	$1^{-\infty} = Indet.$	

RECUERDA
$e^{+\infty} = \infty$
$e^{-\infty} = 0$

OTRAS OPERACIONES CON LÍMITES

$$\lim\,[k \cdot f(x)] = k \cdot \lim\, f(x)$$

$$\lim\left[\frac{f(x)}{k}\right] = \frac{\lim\, f(x)}{k} = \frac{1}{k}\lim\, f(x)$$

(Siendo K un nº)

$$\lim\left[\frac{k}{f(x)}\right] = \frac{k}{\lim\, f(x)}$$

$$\lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\, f(x)}$$

$$\lim[\log f(x)] = \log[\lim\, f(x)]$$

CONTINUIDAD

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Una función es continua en un intervalo de $\mathbb{R}$ si es continua en cada punto del intervalo.

- Una función (x) es continua en un punto x_0 si verifica:
  - $\exists \lim_{x\to x_0} f(x)$, es decir, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)$,
  - $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) = k$, para todo $k \in \mathbb{R}$
- Función a trozos

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x < k \\ f_2(x) & x \geq k \end{cases}$$

Recuerda!
Si falta el signo = no es continua

Entonces

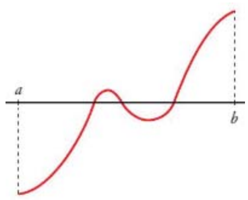
$\lim_{x\to k^-} f(x) = \lim_{x\to k} f_1(x) = f_1(k)$

$\lim_{x\to k^+} f(x) = \lim_{x\to k} f_2(x) = f_2(k)$

Para que sea continua en $x = k \rightarrow f_1(k) = f_2(k)$

- **TEOREMA DE BOLZANO**

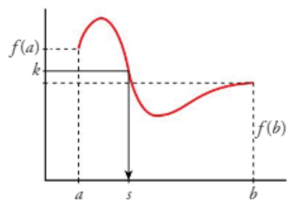
Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y signo de $f(a) \neq$ signo de $f(b)$, entonces existe por lo menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$



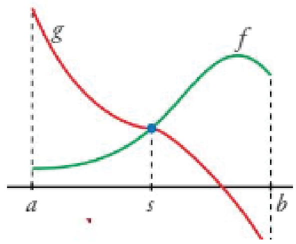
  - **Teorema de los valores intermedios (Darboux)**

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$
entonces toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$.

Cualquiera que sea el num. k entre $f(a)$ y $f(b)$:
existe un num. s, $a < s < b$ tal que $f(s) = k$.

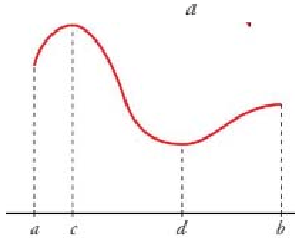


Si f y g son continuas en $[a, b]$ y $f(a) < g(a)$ y $f(b) > g(b)$, entonces existe un numero $s \in (a, b)$ tal que $f(s) = g(s)$



- **TEOREMA DE WEIERSTRASS**

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ entonces tiene un máx. y un min. absoluto en ese intervalo.
Es decir, existen dos numeros $c, d \in [a, b]$ tales que para cualquier $x \in [a, b], f(d) \leq f(x) \leq f(c)$



RECUERDA: Sen x y cos x en RADIANES

DERIVADAS Y APLICACIONES

DERIVABILIDAD DE UNA FUNCIÓN

Una función f es derivable en un punto x_0 si verifica:

- La función f es continua en $x_0 \to f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$
- Existe la derivada en x_0, es decir, coinciden sus derivadas laterales: $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$

Si una función es derivable en un punto, necesariamente es continua en él.

DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

Tanto la base como el exponente dependen de x: $y = f(x)^{g(x)}$

Se toman logaritmos a ambos lados y aplican las propiedades de los logaritmos:

$$ln\, y = ln\, f(x)^{g(x)} \to \ln y = g(x) \ln f(x) \to \frac{y'}{y} = g'(x) \cdot ln\, f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$y'(x) = \left[g'(x) \cdot ln\, f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right] \cdot f(x)^{g(x)}$$

RECTA TANGENTE A UNA CURVA

- **Caso elemental**

Recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisas x_0. Calculando la segunda coordenada del punto $y_0 = f(x_0)$ y la pendiente de la recta tangente $m = f'(x_0)$: $r_{Tangente}: y - y_0 = m(x - x_0)$

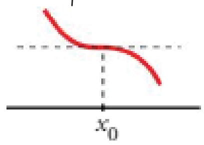
- **Conociendo su pendiente**

Resolvemos la ecuación $m = f'(x_0)$ cuya incógnita es la primera coordenada del punto, x_0, y después calculamos la segunda coordenada, y_0.

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO. EXTREMOS RELATIVOS

- $f(x)$ es **creciente** en un intervalo $(a, b) \Leftrightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$
- $f(x)$ es **decreciente** en un intervalo $(a, b) \Leftrightarrow f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b)$
- $f(x)$ es **derivable** y **creciente** en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$
- $f(x)$ es **derivable** y **decreciente** en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$
- Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ tiene un **máximo relativo** en el punto $(x_0, f(x_0))$
- Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ tiene un **mínimo relativo** en el punto $(x_0, f(x_0))$

OJO: $f'(x_0)=0$ pero no hay mínimo ni máximo: es un punto de inflexión



CURVATURA. PUNTOS DE INFLEXIÓN

- f es **convexa** ∪ en $x_0 \Longrightarrow f'$ es **creciente** en $x_0 \Longrightarrow f''(x_0) > 0$
- f es **cóncava** ∩ en $x_0 \Longrightarrow f'$ es **decreciente** en $x_0 \Longrightarrow f''(x_0) < 0$
- f tiene un **punto de inflexión** en $x_0 \Longrightarrow f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$

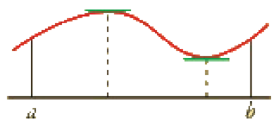
Problemas de optimización

TEOREMA DE ROLLE

Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b).

Si $f(a) = f(b)$ entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Son puntos de tangente horizontal (máximos o mínimos relativos)

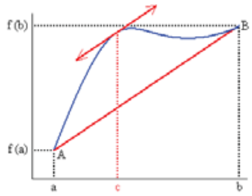


TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Es decir, habrá un punto intermedio c en el que la pendiente de la recta tangente sea igual a la pendiente del segmento $\overline{AB}$

Aplicaciones Teóricas Del Teorema Del Valor Medio

RECUERDA: pendiente (m)=f'(c)



- **Función constante**
  - o f es continua en $[a, b]$
  - o f es derivable en (a, b)
  - o $f'(x) = 0$ en todos los puntos de (a, b)

  $\Longrightarrow f$ es constante en $[a, b]$
- **Función creciente en un punto**
  - o f es derivable en un entorno de x_o
  - o $f'(x_o) > 0$

  $\Longrightarrow f$ es creciente en x_o
- **Mínimo relativo**
  - o $f'(x_o) = 0$
  - o $f''(x_o) > 0$

  $\Longrightarrow$min relativo en x_o
- **Máximo relativo**
  - o $f'(x_o) = 0$
  - o $f''(x_o) < 0$

  $\Longrightarrow$máx relativo en x_o

TEOREMA DE CAUCHY

Si f y g son continuas en (a, b), entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

TEOREMAS: en TEORIA de Selectividad

INTEGRALES INMEDIATAS

1. PASOS GENERALES

- Sacar el número fuera de la integral (si nos conviene)
- Multiplicar la función de la integral por el número que nos haga obtener la derivada de la función junto a la función. Dividir también fuera de la integral por el mismo número.
- Aplicar la regla y obtener su integral.

2. POLINOMIOS

$$\boxed{\int k\cdot dx = kx + C} \quad \boxed{\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C} \quad \boxed{\int (a+b)\,dx = \int a\,dx + \int b\,dx}$$

- $\int (\boldsymbol{x^3 - 2})\,\boldsymbol{dx} = \int x^3 dx + \int (-2) dx = \frac{x^4}{4} - 2x + C$

3. POTENCIAS

CUIDADO: La potencia debe ser distinta de -1

$$\boxed{\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\cdot dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C}$$

- $\int \boldsymbol{7(3x+2)^5\,dx} = 7\int (3x+2)^5\,\mathrm{dx} = \frac{7}{3}\int 3(3x+2)^5\,\mathrm{dx} = \frac{7}{3}\frac{(3x+2)^6}{6} + C = \frac{7(3x+2)^6}{18} + C$

4. LOGARITMO NEPERIANO

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{dx} = \ln|f(x)| + C} \quad \boxed{\int \ln f(x)\cdot f'(x) dx = f(x)\cdot \ln f(x) - f(x) + C}$$

- $\int \boldsymbol{\frac{6}{5x-3}\,dx} = 6\int \frac{1}{5x-3}\mathrm{dx} = \frac{6}{5}\int \frac{5}{5x-3}\mathrm{dx} = \frac{6}{5}\ln|5x-3| + C$
- $\int \boldsymbol{\frac{-2}{3x+7}\,dx} = -2\int \frac{1}{3x+7}\mathrm{dx} = \frac{-2}{3}\int \frac{3}{3x+7}\mathrm{dx} = \frac{-2}{3}\ln|3x+7| + C$

OJO! Puedes "jugar" con los números, pero no con las x

5. EXPONENCIALES EN BASE e

$$\boxed{\int e^{f(x)}\cdot f'(x)\cdot \mathrm{dx} = \mathrm{e}^{f(x)} + C}$$

- $\int \boldsymbol{5\mathrm{e}^{2x}\,dx} = 5\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{dx} = \frac{5}{2}\int 2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{dx} = \frac{5}{2}\mathrm{e}^{2x} + C$
- $\int \boldsymbol{-5x\mathrm{e}^{3x^2}\,dx} = -5\int x\cdot \mathrm{e}^{3x^2}\,\mathrm{dx} = -\frac{5}{6}\int 6x\cdot \mathrm{e}^{3x^2}\,\mathrm{dx} = -\frac{5}{6}e^{3x^2} + C$

6. EXPONENCIALES EN BASE a (DISTINTA DE e)

$$\boxed{\int a^{f(x)}\cdot f'(x)\cdot dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C}$$

- $\int \boldsymbol{3x\cdot 2^{x^2}\,dx} = 3\int x\cdot 2^{x^2}\,\mathrm{dx} = \frac{3}{2}\int 2x\cdot 2^{x^2}\,\mathrm{dx} = \frac{3}{2}\frac{2^{x^2}}{\ln 2} + C$

CUIDADO con los signos!

7. TRIGONOMÉTRICAS: SENO Y COSENO

$$\boxed{\int sen[f(x)]\cdot f'(x)\,dx = -\cos[f(x)] + C} \quad \boxed{\int \cos[f(x)]\cdot f'(x)\,dx = sen[f(x)] + C}$$

- $\int \boldsymbol{5\,sen(3x)\,dx} = 5\int sen(3x)\,dx = \frac{5}{3}\int 3\cdot sen(3x)\,dx = -\frac{5}{3}cos(3x) + C$
- $\int \boldsymbol{7x^2\cdot cos\{2x^3\}\,dx} = 7\int x^2\cdot cos(2x^3)\,dx = \frac{7}{6}\int 6x^2\cdot cos(2x^3)\,dx = \frac{7}{6}sen(2x^3) + C$

8. TRIGONOMÉTRICAS: TANGENTE

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}dx = \mathrm{tg}\, f(x) + C} \quad \boxed{\int [1 + \mathrm{tg}^2 f(x)]\cdot f'(x)\,dx = \mathrm{tg}\, f(x) + C} \quad \boxed{\int \frac{f'(x)}{1 + f(x)^2}dx = \mathrm{arctg}\, f(x) + C}$$

- $\int \boldsymbol{\frac{7}{cos^2 x}\,dx} = 7\int \frac{1}{cos^2 x}dx = 7\,tg\,x + C$
- $\int \boldsymbol{4[1 + \mathrm{tg}^2(3x)]\,dx} = 4\int [1 + \mathrm{tg}^2(3x)]\,dx = \frac{4}{3}\int 3[1 + \mathrm{tg}\,1\,(3x)]\,dx = \frac{4}{3}\mathrm{tg}(3x) + C$
- $\int \boldsymbol{\frac{2}{1+(2x)^2}\,dx} = arc\,tg(2x) + C$

INTEGRALES RACIONALES

1. CASO 1: Grado NUMERADOR ≥ Grado DENOMINADOR

- Hacer la división D(x) (numerador) y d(x) (denominador por el método "de toda la vida".

$$D(x) = d(x) \cdot C(x) + R(x)$$

- Dividir la expresión anterior entre d(x) y aplicar integración a ambos lados.

$$\int \frac{D(x)}{d(x)} = \int C(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{d(x)}dx$$

- $\int \frac{x+2}{x-2}dx = \rightarrow \frac{x+2}{x-2} = 1 + \frac{4}{x-2}$

$$\begin{array}{r|l} x+2 & x-2 \\ \hline -x+2 & 1 \\ \hline 4 & \end{array}$$

$$\int \frac{x+2}{x-2}dx = \int 1dx + \int \frac{4}{x-2} = x + 4\int \frac{1}{x-2} = x + 4\ln|x-2| + C$$

- $\int \frac{x^3-5x^2+3x}{x^3}dx = \int \frac{x^3}{x^3}dx - \int \frac{5x^2}{x^3}dx + \int \frac{3x}{x^3}dx = \int 1dx - 5\int \frac{1}{x}dx + 3\int \frac{1}{x^2}dx =$

$= x - 5\ln|x| + 3\frac{x^{-1}}{-1} + C = x - 5\ln|x| - \frac{3}{x} + C$

2. CASO 2: Grado NUMERADOR < Grado DENOMINADOR (Y CON RAICES REALES SIMPLES, QUE NO SE REPITEN)

- Comprobar si se puede hacer integración inmediata (numerador es derivada del denominador)
- Igualar a cero el denominador y buscar las raíces (resolver la ecuación)
- Expresar el integrando como suma de fracciones: $\frac{D(x)}{d(x)} = \frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)} + \cdots + \frac{N}{(x-x_n)}$
- Despejar y calcular A, B… N
  - o Sacar mcm de la suma de fracciones y expresar como una sola
  - o Eliminar denominadores a ambos lados de la igualdad
  - o Despejar y calcular A, B, … N asignando valores a x.

¡RECUERDA! → Para despejar A le damos a x el valor x_1. Para despejar B le damos a x el valor x_2. Para despejar N le damos a x el valor x_n…

  - o Sustituir los valores de A, B, … N y calcular las integrales inmediatas logarítmicas.

- $\int \frac{x+1}{x^2-3x}dx = \rightarrow \frac{\boxed{x+1}}{x^2-3x} = \frac{x+1}{x(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} = \frac{\boxed{A(x-3)+Bx}}{x(x-3)} \rightarrow \boxed{x+1 = A(x-3) + Bx}$

Para hallar A → x=0 $\quad 0 + 1 = A(0-3) + B\cdot 0;\quad A = -1/3$

Para hallar B → x=3 $\quad 3 + 1 = A(3-3) + B\cdot 3;\quad B = 4/3$

$$\int \frac{x+1}{x^2-3x}dx = \int \frac{-1/3}{x}dx + \int \frac{4/3}{x-3}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{x}dx + \frac{4}{3}\int \frac{1}{x-3}dx = -\frac{1}{3}\ln|x| + \frac{4}{3}\ln|x-3| + C$$

- $\int \frac{3x+4}{2x^3+x^2-2x-1}dx = \rightarrow$ Aplicamos Ruffini y fórmula para resolver ecuaciones de 2º grado…

Las raíces son: $x_1 = 1, x_2 = -1$ y $x_3 = -1/2$.

¡CUIDADO! → <u>Multiplicamos toda la descomposición por el coeficiente del grado mayor</u>: en este caso 2 (por el $2x^3$)

$$\frac{3x+4}{\boxed{2}x^3+x^2-2x-1} = \frac{A}{2(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1/2)} = \frac{A(x+1)(x+{}^1\!/_2) + B2(x-1)(x+1/2) + C2(x-1)(x+1)}{2(x-1)(x+1)(x+1/2)} \rightarrow$$

$\rightarrow 3x+4 = A(x+1)(x+{}^1\!/_2) + B2(x-1)(x+{}^1\!/_2) + C2(x-1)(x+1)$

Para A → x=1 $\quad 3+4 = A(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right) + B2(1-1)\left(1+\frac{1}{2}\right) + C2(1-1)(1+1) \rightarrow A = \frac{7}{3}$

Para B → x= -1 $\quad 3+4 = A(-1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right) + B2(-1-1)\left(-1+\frac{1}{2}\right) + C2(-1-1)(-1+1) \rightarrow B = \frac{1}{2}$

Para C → x= -1/2 $\quad 3+4 = A\left(-\frac{1}{2}+1\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + B2\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + C2\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}+1\right) \rightarrow C = -\frac{5}{3}$

$$\int \frac{3x+4}{2x^3+x^2-2x-1}dx = \int \frac{7/3}{2(x-1)}dx + \int \frac{1/2}{(x+1)}dx + \int \frac{-5/3}{\left(x+\frac{1}{2}\right)}dx = \frac{7}{6}\int \frac{1}{(x-1)}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)} - \frac{5}{3}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)}dx =$$

$= \frac{7}{6}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{5}{3}\ln\left|x+\frac{1}{2}\right| + C$

3. CASO 3: Grado NUMERADOR < Grado DENOMINADOR (Y CON RAICES REALES MÚLTIPLES, QUE SE REPITEN)

- Comprobar si se puede hacer integración inmediata (numerador es derivada del denominador)
- Igualar a cero el denominador y buscar las raíces (resolver la ecuación)
- Expresar el integrando como suma de fracciones
- Para las raíces repetidas, deberemos dar a x un valor fácil para operar, que no esté repetido.

- $\int \frac{2x+3}{x^2-2x+1}dx = \to \frac{2x+3}{(x-1)(x-1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2} \to 2x+3 = A(x-1)+B$

  Para B → x=1 $\quad 2+3 = A(1-1)+B; \quad \to \quad B = 5$

  Para A → x=0 $\quad 0+3 = A(0-1)+B; \quad \to \quad 3 = -A+5; \quad A = 2$

  B ya sé lo que vale. Para A elijo un valor "fácil"

  $$\int \frac{2x+3}{x^2-2x+1}dx = \int \frac{2}{(x-1)}dx + \int \frac{5}{(x-1)^2}dx = 2\int \frac{1}{(x-1)}dx + 5\int (x-1)^{-2}dx =$$

  $$2\ln|x-1| + 5\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C = 2\ln|x-1| - \frac{5}{(x-1)} + C$$

- $\int \frac{2x+5}{(x+3)^3}dx = \to \frac{2x+5}{(x+3)^3} = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{C}{(x+3)^3} = \frac{A(x+3)^2+B(x+3)+C}{(x+3)^3} \to 2x+5 = A(x+3)^2+B(x+3)+C$

  Para C → x=-3 $\quad 2(-3)+5 = C; \quad \to \quad C = -1$

  Para B → x=0 $\quad 0+5 = 9A+3B-1;$

  Para A → x=-1 $\quad 2(-1)+5 = 4A+2B-1;$ $\quad \to \quad Sistema\ de\ ecuaciones\!: A = 0; \ B = 2$

INTEGRALES POR PARTES

$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}$$

Sentada un día vi una vaca sin rabo vestida de uniforme

Regla para identificar quién es u y quién es dv. Elegiremos como u la función que aparezca 1º en ALPES.

ALPES

Arcos → Logaritmos → Polinomios → Exponenciales → Senos, cosenos

- Identificar quién es u y quién es dv
- Determinar du y v
- Aplicamos la fórmula

- $\int (x+2)\cos x\,dx \quad \to \quad ALPES\!: \ u = (x+2); \ \ dv = \cos x\,dx$

  $du = 1\,dx; \quad v = sen\,x$

  $$\int (x+2)\cdot \cos x\,dx = (x+2)\cdot senx - \int senx \cdot 1\,dx = (x+2)senx + cosx + C$$

- $\int x \cdot e^{2x}dx = \quad \to \quad ALPES\!: \quad u = x; \quad dv = e^{2x}$

  $du = 1\,dx; \quad v = \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int 2\,e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}$

  $$\int x \cdot e^{2x}dx = x\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\,1\,dx = x\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2\cdot 2}\int 2\,e^{2x}\,dx = x\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

Caso Especial: Integral CÍCLICA

- $\int \cos^2 x\,dx = \int \cos x \cos x\,dx \quad \to \quad ALPES\!: \quad u = \cos x\,; dv = \cos x\,; \quad du = -senx; \ \ v = senx$

  $$\int \cos^2 x\,dx = \cos x\,senx - \int senx(-senx)dx = \cos x\,senx + \int sen^2 x\,dx =$$

  $$\boxed{\int \cos^2 x\,dx =} \cos x\,senx + \int (1-\cos^2 x)\ dx = \cos x\,senx + \int dx - \boxed{\int \cos^2 x\ dx} \to$$

  $$\int \qquad = \cos x\,senx + x - \int \qquad \to 2\int \qquad = \cos x\,senx + x \to \boxed{\int \cos^2 x\,dx = \frac{\cos x\,senx + x}{2} + C}$$

INTEGRALES POR CAMBIO DE VARIABLE

EN EL INTEGRANDO HAY:	CAMBIO SUGERIDO	
Raíces cuadradas	$t=\sqrt{()}$	
Raíces NO cuadradas	$t=\sqrt[m]{()}$	m como el mcm de los índices de las raíces
Func. Exponenciales	$t=e^{nx}$	n el menor índice de los exponentes
Fun. Logarítmicas	$t=\ln x$ si aparece sólo x $t=(lo\ de\ dentro\ del\ log)$ si el logaritmo es de un polinomio	

Pasos a seguir:

- Elegir el cambio de variable
- Despejar x
- Derivar a ambos lados de la igualdad
- Sustituir los términos obtenidos en la integral original y ordenarlos (si lo hemos hecho bien, desaparece x y la integral dependerá solo de t)
- Resolver la integral con los métodos conocidos
- Deshacer el cambio de variable volviendo a sustituir t en la integral ya resuelta

- $\int x\sqrt{x+3}\,dx \quad\rightarrow\quad \boxed{t=\sqrt{x+3}};\quad t^2=x+3;\quad \boxed{x=t^2-3};$

  Derivamos respecto de x a la izquierda, y respecto de t a la derecha

  $(x)'=(t^2-3)';\quad \boxed{1\,dx=2t\,dt}$

  $\int x\sqrt{x+3}\,dx=\int(t^2-3)\cdot t\cdot 2t\,dt=\int 2(t^4-3t^2)dt=2\int(t^4-3t^3)dt=$

  $=2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{3t^3}{3}\right)+C=\frac{2t^5}{5}-2t^3+C$

  $\int x\sqrt{x+3}\,dx=\frac{2t^5}{5}-2t^3+C=\frac{2\left(\sqrt{x+3}\right)^5}{5}-2\left(\sqrt{x+3}\right)^3+C$

  IMPORTANTE! Deshacer el cambio de variable

- $\int x\ln(x^2-5)dx \quad\rightarrow\quad \boxed{t=x^2-5};\quad \boxed{x=\sqrt{t+5}};\ \rightarrow\ (x)'=\left(\sqrt{t+5}\right)';\quad \boxed{1\,dx=\frac{1}{2\sqrt{t+5}}\,dt}$

  $\int\sqrt{t+5}\cdot\ln t\cdot\frac{1}{2\sqrt{t+5}}dt=\frac{1}{2}\int\ln t\cdot 1\,dt=\frac{1}{2}[t\cdot\ln t-t]+C=$

  $=\frac{(x^2-5)\cdot\ln(x^2-5)}{2}-\frac{(x^2-5)}{2}+C$

- $\int x\ln(x^2-5)dx=\frac{1}{2}\int 2x\ln(x^2-5)dx=\frac{1}{2}[(x^2-5)\cdot\ln(x^2-5)-(x^2-5)]+C=$

  $=\frac{(x^2-5)\cdot\ln(x^2-5)}{2}-\frac{(x^2-5)}{2}+C$

  Es el mismo, pero de una forma "directa", si nos damos cuenta

PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN

Una función tiene infinitas primitivas, que se diferencian entre sí por la constante.

Encuentra la función primitiva de $y=x^2+2x$ que pase por el punto $(1,3)$.

$$\int(x^2+2x)\,dx=\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}+C=\frac{x^3}{3}+x^2+C\quad\rightarrow\quad y=\frac{x^3}{3}+x^2+C$$

$$3=\frac{1^3}{3}+1^2+C\quad\rightarrow\quad C=\frac{5}{3}$$

$$\boxed{y=\frac{x^3}{3}+x^2+\frac{5}{3}}$$

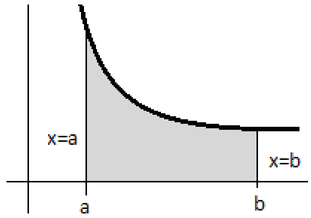
En la primitiva, sustituyo los valores del punto para calcular C

INTEGRALES DEFINIDAS

INTEGRAL DEFINIDA DE UNA FUNCIÓN

limitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$.

$$\int_a^b f(x)dx$$

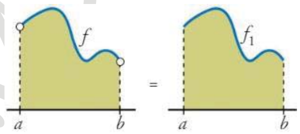


PROPIEDADES

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- Si $f(x) \geq 0$ e integrable en $[a,b] \to \int_a^b f(x)dx \geq 0$

  Si $f(x) \leq 0$ e integrable en $[a,b] \to \int_a^b f(x)dx \leq 0$
- Si $a < b < c \to \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$
- Si $f(x)$ continua en (a,b) y existen y son finitos los límites laterales $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \alpha$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \beta$, entonces se forma la siguiente función:

  $f_1(x) = \begin{cases} \alpha & x = a \\ f(x) & a < x < b \\ \beta & x = b \end{cases}$ y definimos $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx$



- $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
- Si para cada $x \in [a,b]$ es $f(x) \leq g(x)$, entonces $\int_a^b f(x)dx \leq \int_b^a g(x)dx$
- **TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO INTEGRAL:**

  Si f es continua en $[a,b]$, existe un nº $c \in (a,b)$ tal que $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

IMPORTANTE
En la TEORÍA
de Selectividad!

REGLA DE BARROW

Se dice que $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$.

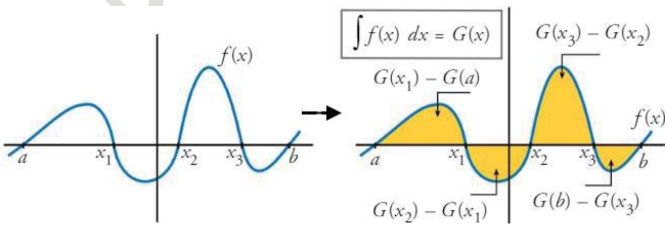
Si $f(x)$ contina en $[a,b]$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces: $\boxed{\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$

Pasos para calcular la integral:

- Buscamos una primitiva, $F(x)$, de f: $F(x) = \int f(x)dx$
- Calculamos $F(b)$ y $F(a)$
- Hacemos $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

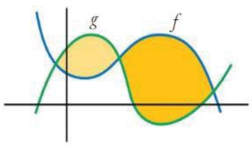
OJO: la calculadora puede dar 0.
Hay que poner las zonas por separado y en valor absoluto.

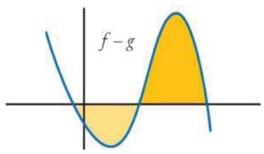
CÁLCULO DE ÁREAS



Las áreas se miden en u^2,
y SIEMPRE son POSITIVAS
(valores absolutos)

Área comprendida entre dos curvas: es igual al área comprendida entre la función diferencia y el eje X





TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL

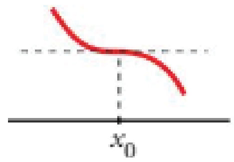
- Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$, entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es derivable, y además $F'(x) = f(x)$ para todo $x \epsilon (a,b)$.

IMPORTANTE
En la TEORÍA
de Selectividad!

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO. EXTREMOS RELATIVOS

- $f(x)$ es **creciente** en un intervalo $(a,b) \Leftrightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$
- $f(x)$ es **decreciente** en un intervalo $(a,b) \Leftrightarrow f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b)$
- Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ tiene un **máximo relativo** en el punto $(x_0, f(x_0))$
- Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ tiene un **mínimo relativo** en el punto $(x_0, f(x_0))$



OJO: $f'(x_0)=0$ pero no hay mínimo ni máximo: es punto de inflexión

PROBLEMAS

1. Halla dos números que sumados den 40 y cuyo producto sea máximo.
SOL: A=20, B=20

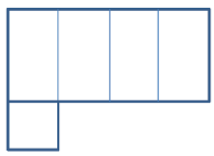
2. Disponemos de 20m de cuerda. ¿Cuál es el área del mayor rectángulo que podemos acotar con ella? *SOL: x=5, y=5*

3. Queremos dividir un hilo metálico de 70 metros de longitud en tres partes de manera que una de ellas tenga doble longitud que otra y además que al construir con cada parte un cuadrado, la suma de las áreas de los tres cuadrados sea mínima. Calcula la longitud de cada parte. *SOL: 15cm, 30, 25 cm (SELECTIVIDAD Galicia septiembre 2014)*

4. Se desea construir una caja de base cuadrada, con tapa y una capacidad de 80 dm3. Para la tapa y la superficie lateral se quiere utilizar un material que cuesta 2€/dm^2 y para la base otro que cuesta 3€/dm^2. Calcula las dimensiones de la caja para que su coste sea mínimo.
SOL: x=4dm, y=5dm (SELECTIVIDAD Galicia junio 2017)

5. Determina dos números reales positivos, sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.
SOL: x=5, y=5 (SELECTIVIDAD Andalucía junio 2007)

6. Se quiere construir un depósito en forma de prisma de base cuadrada sin tapadera que tenga una capacidad de 500 m^3. ¿Qué dimensiones ha de tener el depósito para que su superficie sea mínima?



SOL: x=10, y=5 (SELECTIVIDAD Andalucía junio 2006)

7. Se desea construir un depósito cilíndrico cerrado de área total a 54 m2. Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que éste tenga volumen máximo.
SOL: r=1,69m, h=3,39m (SELECTIVIDAD Andalucía junio 2011)

8. Se quiere cercar un campo rectangular que linda un camino por uno de sus lados. La cerca que linda con el camino cuesta 6 €/m y la de los otros lados cuesta 2€/m. Calcula las dimensiones del campo de área máxima que se puede cercar con 2560€.
SOL: 160m y 320m (SELECTIVIDAD Galicia Mate CCSS septiembre 2005)

9. Se quiere imprimir un cartel anunciador rectangular que debe contener 18 cm^2 de texto impreso (también rectangular). Los márgenes superior e inferior deben ser de 2 cm cada uno, mientras que los laterales deben ser de 1 cm. Calcular las dimensiones del cartel para que el gasto de papel sea mínimo.
SOL: 5cm ancho y 10 cm alto (DIFICULTAD ALTA)

EJERCICIOS RESUELTOS

2019 JULIO. Opción A

a) Consideremos un triángulo tal que: dos de sus vértices son el origen $O(0,0)$ y el punto $P(1,3)$, uno de sus lados está sobre el eje X y otro sobre la tangente en $P(1,3)$ a la gráfica de la parábola $y = 4 - x^2$. Se pide calcular las coordenadas del tercer vértice, dibujar el triángulo y calcular, por separado, el área de las dos regiones en las que el triángulo queda dividido por la parábola $y = 4 - x^2$

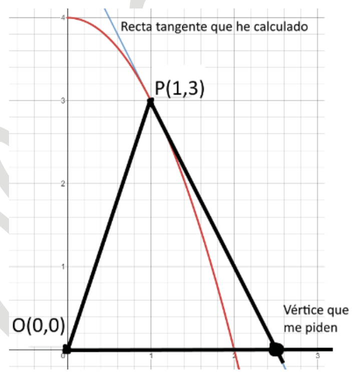
SOLUCION:

- Calculamos la ecuación de la recta tangente en (1,3) a la parábola $f(x) = 4 - x^2$

$$f(x) = 4 - x^2 \rightarrow f'(x) = -2x \rightarrow calculamos\ la\ pendiente\ f'(1) = -2 = m$$
$$La\ ecuación\ de\ la\ recta: y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 3 = -2(x - 1)$$
$$y = -2x + 5$$

(0,25 puntos calcular la ecuación de la recta tangente)

- Dibujamos la ecuación de la parábola, la recta que acabamos de calcular, y los dos puntos que conocemos del triángulo



Me dicen que un lado está sobre el eje X y otro sobre la recta tangente (que acabo de calcular). El tercer lado tiene que ser la unión de O y P. Por tanto, el 3º punto que me piden tiene que ser donde se unen la recta tangente y el eje X. *(0,5 dibujar el triángulo)*

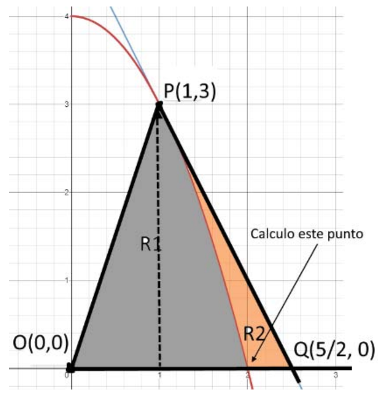
- Calculo el 3º vértice

Igualo la recta tangente y el eje X $-2x + 5 = 0 \rightarrow 2x = 5 \rightarrow x = 5/2$

El punto, que llamamos Q por ejemplo será: $Q(5/2, 0)$ *(0,5 calcular el vértice)*

- Calculo ahora el punto donde "se dividen" las dos regiones, para calcular las dos áreas

$$4 - x^2 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow punto\ de\ corte\ (2,0)$$



- Calculo el área R1 (la gris)

Si me fijo, veo que R1 son dos triángulos: uno rectángulo (de base 1 unidad y altura 3 unidades), y el otro que va hasta la parábola. (En el dibujo están separados por la línea discontinua. Por tanto, el área R1 será:

$$área\ (R1) = \frac{1 * 3}{2} + \int_1^2 (4 - x^2)dx = \frac{3}{2} + \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{19}{6}u^2$$

(0,5 calcular el área de R1)

- Calculo el área R2 (la naranja)

¡El área R2 es tan sencillo como restar a todo el triángulo (base*altura/2) el área R1 que acabo de calcular!

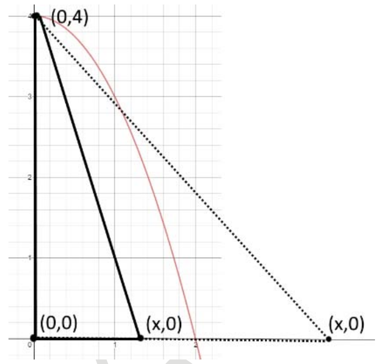
$$área\ (R2) = \frac{\frac{5}{2} * 3}{2} - \frac{19}{6} = \frac{7}{12}u^2$$

$$(lo\ podría\ hacer\ por\ integrales, pero\ tendría\ que\ hacer\ dos: \int_1^2 \quad + \int_2^{5/2} \quad)$$

(0,5 calcular el área de R2)

2019 **JULIO. Opción B**

a) De entre todos los triángulos rectángulos con tenidos en el primer cuadrante que tienen un vértice en el origen, otro sobre la parábola $y = 4 - x^2$, un cateto sobre el eje X y el otro paralelo al eje Y, obtén los catetos y la hipotenusa de aquel cuya área es máxima. *(2 puntos)*

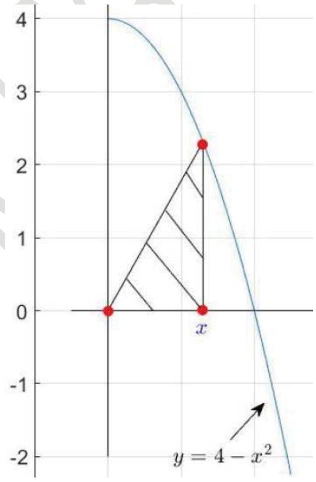


SOLUCION:

- Dibujamos una primera opción, y valoramos.

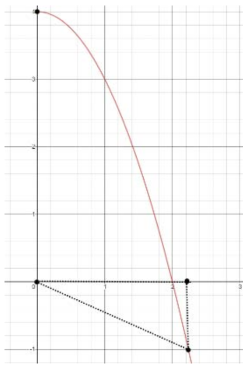
Una opción, es que sea rectángulo en el punto (0,0). Entonces tendría el 2º vértice en (0,4) y el tercero sobre el eje X (x,0).
El "problema" es que, si fuera así, ¡el punto (x,0) podría estar en el infinito! Y sería imposible calcular el triángulo de área máxima, porque cuanto más lejos pongamos el punto (x,0), mayor será el área… Así que este diseño del triángulo no nos vale.

- Dibujamos otra opción de triángulo rectángulo



Suponemos ahora que el lado que forma el ángulo rectángulo, está "al otro lado".
El triángulo por tanto tendrá base x (donde esté el punto), y altura $4 - x^2$ (siendo x de nuevo el punto a calcular). El área será, por tanto:

$$A(x) = \frac{x(4 - x^2)}{2}$$



<u>¡CUIDADO! Con x entre 0 y 2.</u> Porque si no, el triángulo ya no me quedaría en el 1º cuadrante, que es una condición del problema.

← Esta opción no nos valdría!

- Me piden el área máxima: derivo e igualo a 0 para calcular dónde hay un máximo.

$$A'(x) = \frac{(4 - x^2) - x(-2x)}{2} = \frac{-3x^2 + 4}{2} = -\frac{3}{2}x^2 + 2 = 0$$

$$Despejo\ la\ x \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Como la x tiene que estar en el primer cuadrante, me quedo con el resultado positivo: $x = +\frac{2}{\sqrt{3}}$

- Calculo las longitudes de los catetos

El cateto del eje x, mide $\frac{2}{\sqrt{3}}u^2$
El cateto vertical, para calcularlo tengo que calcular el punto donde corta a la parábola:

$$f(x) = 4 - x^2 \rightarrow f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 4 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{4}u^2$$

- Calculo la longitud de la hipotenusa

$$h = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{8}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{3} + \frac{64}{9}} = \sqrt{\frac{26}{3}}u^2$$

INTEGRALES

1. $\int x^3\,dx$
2. $\int \frac{x^3}{3}\,dx$
3. $\int \frac{x^4}{6}\,dx$
4. $\int (x^3+3)\,dx$
5. $\int (x^2+2x-\frac{1}{x})\,dx$
6. $\int \frac{x^3-x^2+1}{x}\,dx$
7. $\int \frac{dx}{x^2}$
8. $\int \frac{dx}{x^5}$
9. $\int \frac{x^4-2x+3}{x^6}\,dx$
10. $\int \frac{4\sqrt[3]{x}}{3}\,dx$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$
12. $\int \left(\frac{8}{3}\sqrt[3]{x}+3\sqrt{x}\right)dx$
13. $\int \sqrt[3]{x}\,(\sqrt{x}+1)\,dx$
14. $\int (x^2-2\,senx+8\cos x)\,dx$
15. $\int \left(e^x+\frac{1}{x}\right)dx$
16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$
17. $\int \frac{(x+1)(x^2+3)}{x^3}\,dx$
18. $\int (\sec^2 x+\cos x+x)\,dx$
19. $\int tg^2 x\,dx$
20. $\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$
21. $\int \frac{\cos^2 x-sen^2 x}{sen^2 x\,\cos^2 x}\,dx$
22. $\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)dx$
23. $\int 5^x\,3^x\,dx$
24. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{3}{1+x^2}\right)dx$
25. $\int \frac{dx}{sen^2 x\,\cos^2 x}$
26. $\int \frac{2-sen^3 x}{sen^2 x}\,dx$
27. $\int \frac{dx}{3x+2}$
28. $\int \frac{dx}{3-x}$
29. $\int \frac{x\,dx}{2+x^2}$
30. $\int \frac{2\,dx}{(x+1)^3}$
31. $\int \frac{x^2\,dx}{1+x^3}$
32. $\int \frac{sen2x\,dx}{3+sen^2 x}$
33. $\int \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{x^2-6x+1}}$
34. $\int e^x\sqrt{2+e^x}\,dx$
35. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$
36. $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$
37. $\int sen\,5x\,dx$
38. $\int 6x\cos x^2\,dx$
39. $\int \frac{\cos x\,dx}{1+sen^2 x}$
40. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1-tg^2 x}}$
41. $\int x^4 e^{x^5}\,dx$
42. $\int \frac{(4x^3)\,dx}{1+x^8}$
43. $\int 2^x\,dx$
44. $\int \frac{dx}{x^2+9}$
45. $\int e^{7x}\,dx$
46. $\int (e^x+e^{-x})\,dx$
47. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$
48. $\int \frac{\cos x}{e^{sen\,x}}\,dx$
49. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$
50. $\int \frac{dx}{2x^2+9}$
51. $\int (2x+5)^9\,dx$
52. $\int \frac{(arctgx)^3\,dx}{1+x^2}$
53. $\int sen^5 x\cos x\,dx$
54. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{sen^2 x}}\,dx$

55. $\int \frac{dx}{x\ln x}$
56. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$
57. $\int (e^x+e^{-x})^2\,dx$
58. $\int \frac{dx}{(\arccos x)^3\sqrt{1-x^2}}$
59. $\int \frac{1+\ln x}{5+x\ln x}\,dx$
60. $\int \frac{tg^2 x+tgx}{\cos^2 x}\,dx$
61. $\int \sqrt{cosx}\;senx\,dx$
62. $\int e^{e^x} e^x\,dx$
63. $\int e^x\cos e^x\,dx$
64. $\int \frac{dx}{(x+1)^2+1}$
65. $\int \frac{sen^3 x}{\sqrt{cosx}}\,dx$
66. $\int senlnx\,\frac{dx}{x}$
67. $\int \frac{x^2\,dx}{2+x^6}$
68. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,dx$
69. $\int \frac{\sqrt{3+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$
70. $\int \frac{\cos^3 x}{sen^3 x}\,dx$
71. $\int x^3 e^{-x^4}\,dx$
72. $\int \frac{e^x}{e^{2x}-2e^x+1}\,dx$
73. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$
74. $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$
75. $\int \ln(\cos x)\,tgx\,dx$
76. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}\,dx$
77. $\int \frac{e^{2\,tg\,x}}{\cos^2 x}\,dx$
78. $\int \frac{senx}{\cos^2 x}\,dx$
79. $\int sen2\frac{x}{\sqrt{2-\cos 2x}}\,dx$
80. $\int sen^3 x\;\cos^2 x\,dx$
81. $\int \frac{\cos x}{e^{senx}}dx$

INTEGRACIÓN POR PARTES

82. $\int x\,senx\,dx$
83. $\int x\cos 3x\,dx$
84. $\int x^2\ln x\,dx$
85. $\int x^3 e^x\,dx$
86. $\int x^2 e^{3x}\,dx$
87. $\int x\,e^x\,dx$
88. $\int arcsenx\,dx$
89. $\int x\sqrt{1+2x}\,dx$
90. $\int x\,arctgx\,dx$
91. $\int x^2\,senx\,dx$
92. $\int (\ln x)^2\,dx$
93. $\int \mathrm{sen}(\ln x)\,dx$
94. $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$
95. $\int arctgx\,dx$
96. $\int x^2\cos x\,dx$
97. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$
98. $\int sen(\ln x)\,dx$
99. $\int \frac{2x\,dx}{\cos^2 x}$
100. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$
101. $\int (x^2-x)\,e^{-x}\,dx$
102. $\int x^3 e^{x^2}\,dx$
103. $\int \ln x\,dx$
104. $\int e^x\cos x\,dx$
105. $\int e^x sen\,x\,dx$
106. $\int x\,e^{-3x}\,dx$
107. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$
108. $\int x\,cosx\,dx$
109. $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$
110. $\int x^2\,senx\,dx$
111. $\int e^{-3x}\cos x\,dx$
112. $\int x(\ln x)^2\,dx$
113. $\int x^3\ln x\,dx$
114. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx$
115. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x}}$
116. $\int (x-3)senx\,dx$
117. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$

118. $\int \frac{x \ arcsenx}{\sqrt{1 - x^2}} \ dx$ 119. $\int x \ arcsenx^2 \ dx$ 120. $\int \sqrt{x} \ (lnx)^2 \ dx$

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

121. $\int \frac{2x - 3}{x + 2} \ dx$ 122. $\int \frac{dx}{x^2 - 4}$ 123. $\int \frac{x - 1}{x^2 + x - 6} \ dx$ 1

124. $\int \frac{2 \ dx}{x^2 + 5x + 6}$ 125. $\int \frac{x + 1}{x \ (x - 1)^2} \ dx$ 126. $\int \frac{dx}{x^2 + 2x}$ 2

127. $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 + x - 6} \ dx$ 128. $\int \frac{x^3 - 1}{x^2 + x} \ dx$ 129. $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \ dx$ 3

130. $\int \frac{dx}{x^2 \ (x + 1)}$ 131. $\int \frac{dx}{x^2 - 9}$ 132. $\int \frac{x \ dx}{(x - 1)^2 \ (x + 1)}$ 4

133. $\int \frac{6 \ dx}{x \ (x - 1) \ (x + 2)}$ 134. $\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} \ dx$ 135. $\int \frac{2x^2 + 2x - 1}{x + 1} \ dx$ 5

136. $\int \frac{(2x^2 - 7x) \ dx}{x^3 - 3x^2 + 4}$ 137. $\int \frac{(2x + 4) \ dx}{x^2 + 2x - 3}$ 138. $\int \frac{dx}{(x + 1)(x - 2)^2 (x + 3)}$

139. $\int \frac{dx}{x^3 + x^2}$ 140. $\int \frac{(3x^2 + 2x + 5) \ dx}{(x - 2)^2 \ (x + 1)^2}$ 141. $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} \ dx$

142. $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \ dx$ 143. $\int \frac{(x - 8) \ dx}{x^3 - 4x^2 + 4x}$ 144. $\int \frac{x + 1}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} \ dx$

145. $\int \frac{dx}{x^3 + x^2 + x}$ 146. $\int \frac{dx}{x^2 + 4}$ 147. $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5}$

148. $\int \frac{3 \ dx}{x^3 - 1}$ 149. $\int \frac{5x^2 - 2x + 25}{x^3 - 6x^2 + 25x} \ dx$ 150. $\int \frac{-2x \ dx}{(x - 1)^2 (x^2 + 1)}$

INTEGRALES VARIADAS

151. $\int (x^3 + 3x^2 + 2x - 3) \ dx$ 152. $\int (e^x + 3) \ dx$ 153. $\int \left(e^{-x} + \sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{2x}} + \frac{1}{x^2} \right) dx$

154. $\int x^2 \ e^x \ dx$ 155. $\int \frac{dx}{(3x + 1)^4}$ 156. $\int \frac{3 + 2x^2}{5 + (3x + 2/3 \ x^3)} \ dx$

157. $\int \frac{(2x + 1) \ dx}{(x^2 + x)^3}$ 158. $\int \frac{x}{\cos^2 x} \ dx$ 159. $\int \frac{5 \ dx}{e^x + e^{-x}}$

160. $\int (1 + tag^2 x^2) \ x \ dx$ 161. $\int sen^2 x \ dx$ 162. $\int tag^2 x \ dx$

163. $\int (3 + tag^2 x) \ dx$ 164. $\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \ dx$ 165. $\int \sqrt{2 + x^2} \ x \ dx$

166. $\int \frac{5 \ cosx}{\sqrt{1 + senx}} \ dx$ 167. $\int \frac{e^{3x} + e^x + 1}{e^x} \ dx$ 168. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

169. $\int \frac{3x^3 \ dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$ 170. $\int \frac{5^x}{3^x} \ dx$ 171. $\int \frac{\ln \ x}{x^2} \ dx$

172. $\int \left(\frac{6x^2}{sen^2 x^3} + \frac{4}{\cos^2 4x} \right) dx$ 173. $\int \frac{dx}{e^{2x + 1}}$ 174. $\int \frac{dx}{x^2 + 4}$

175. $\int \frac{x^2 \ dx}{x^3 + 4}$ 176. $\int \frac{e^{3x}}{1 + e^{6x}} \ dx$ 177. $\int e^{-5x^2} \ (-5x) \ dx$

178. $\int \frac{tgx}{\cos^2 x} \ dx$ 179. $\int tgx \ dx$ 180. $\int (\cos 5x - 3 \ sen2x) \ dx$

181. $\int \frac{x \ dx}{1 + (x^2 + 3)^2}$ 182. $\int \frac{\ln \ x}{x} \ dx$ 183. $\int (x - e^x \ cosx) \ dx$

184. $\int \frac{dx}{1 - senx}$ 185. $\int e^{senx} \ cosx \ dx$ 186. $\int sen^3 x \ \cos^3 x \ dx$

187. $\int x \ \cos(1 + x^2) \ dx$ 188. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \ (1 + \sqrt{x})}$ 189. $\int \frac{x + 9}{x^2 - 9} \ dx$

190. $\int \frac{5 \ e^x}{2 + e^x} \ dx$ 191. $\int \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} \ dx$ 192. $\int \frac{dx}{1 - sen^2 x}$

193. $\int \frac{x \ dx}{x + \sqrt{x}}$ 194. $\int \frac{tg^3 x}{\cos^2 x} \ dx$ 195. $\int \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x} \ dx$

196. $\int \frac{2x}{9 + 5x^2} \ dx$ 197. $\int \frac{2x^3 + x^2 + 3x + 1}{x + 1} \ dx$ 198. $\int \frac{1 + sen^2 x}{senx \ cosx} \ dx$

199. $\int \frac{cosx}{sen^3 x} \ dx$ 200. $\int \frac{2x \ dx}{\sqrt{1 - x^4}} \ dx$

SOLUCIONES A LAS INTEGRALES

1. $\frac{x^4}{4} + c$
2. $\frac{x^4}{12} + c$
3. $\frac{x^5}{30} + c$
4. $\frac{x^4}{4} + 3x + c$
5. $\frac{x^3}{3} + x^2 - \ln|x| + c$
6. $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \ln|x| + c$
7. $-\frac{1}{x} + c$
8. $-\frac{1}{4x^4} + c$
9. $-\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^4} - \frac{3}{5x^5} + c$
10. $\sqrt[3]{x^4} + c$
11. $\frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3} + c$
12. $2\sqrt[3]{x^4} + 2\sqrt{x^3} + c$
13. $\frac{6}{11}\sqrt[6]{x^{11}} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c$
14. $\frac{x^3}{3} + 2\cos x + 8\ sen\, x + c$
15. $e^x + \ln|x| + c$
16. $\frac{-2}{\sqrt{x}} + c$
17. $x + \ln|x| - \frac{3}{x} - \frac{3}{2x^2} + c$
18. $tg\, x + sen\, x + \frac{x^2}{2} + c$
19. $tg\, x - x + c$
20. $\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x} + c$
21. $-cotg\, x - tg\, x + c$
22. $e^x + \ln|x| + c$
23. $\frac{15^x}{\ln 15} + c$
24. $arcsen\, x - 3\, arctg\, x + c$
25. $tg\, x - cotg\, x + c$
26. $-2\ cotg\, x + \cos x + c$
27. $\frac{1}{3}\ln|3x + 2| + c$
28. $-\ln|3 - x| + c$
29. $\frac{1}{2}\ln|2 + x^2| + c$
30. $\frac{-1}{(x+1)^2} + c$
31. $\frac{1}{3}\ln|1+x^3| + c$
32. $\ln|3+sen^2 x| + c$
33. $\sqrt{x^2-6x+1} + c$
34. $\frac{2\sqrt{(2+e^x)^3}}{3} + c1$
35. $\frac{\ln^2 x}{2} + c$
36. $\frac{2\sqrt{(x^3+1)^3}}{9} + c$
37. $-\frac{1}{5}\cos 5x + c$
38. $3\ sen\, x^2 + c$
39. $arctg\,(sen\, x) + c$
40. $\text{arc}\, sen(tg\, x) + c$
41. $\frac{e^{x^5}}{5} + c$
42. $\text{arc}\, tg\, x^4 + c$
43. $\frac{2^x}{\ln 2} + c$
44. $\frac{1}{3}\ \text{arc}\, tg\frac{x}{3} + c$
45. $\frac{e^{7x}}{7} + c$
46. $e^x - e^{-x} + c$
47. $2e^{\sqrt{x}} + c$
48. $-e^{-sen\, x} + c$
49. $\text{arc}\, sen\left(\frac{x}{5}\right) + c$
50. $\frac{1}{3\sqrt{2}}\text{arc}\, tg\left(\frac{\sqrt{2}\, x}{3}\right) + c$
51. $\frac{(2x+5)^{10}}{20} + c$
52. $\frac{(\text{arc}\, tg\, x)^4}{4} + c$
53. $\frac{sen^6 x}{6} + c$
54. $3\sqrt[3]{sen\, x} + c$
55. $\ln\left|\ln|x|\right| + c$
56. $2\ sen\sqrt{x} + c$
57. $\frac{e^{2x}}{2} + 2x - \frac{e^{-2x}}{2} + c$
58. $\frac{(\text{arc}\cos x)^2}{2} + c$
59. $\ln|5 + x\ln x| + c$
60. $\frac{tg^3 x}{3} + \frac{tg^2 x}{2} + c$
61. $\frac{-2\sqrt{(\cos x)^3}}{3} + c$
62. $e^{e^x} + c$
63. $sen\, e^x + c$
64. $\text{arc}\, tg\ (x+1) + c$
65. $-2\sqrt{\cos x} + \frac{2\sqrt{(\cos x)^5}}{5} + c$
66. $-\cos(\ln x) + c$
67. $\frac{1}{3\sqrt{2}}\ \text{arc}\, tg\left(\frac{x^3}{\sqrt{2}}\right) + c$
68. $\text{arc}\, sen(\ln x) + c$
69. $\frac{4\sqrt{(3+\sqrt{x})^3}}{3} + c$
70. $-\frac{1}{2\, sen^2 x} - \ln|sen\, x| + c$
71. $-\frac{1}{4}e^{-x^4} + c$
72. $-\frac{1}{e^x - 1} + c$
73. $\frac{1}{2}\ \text{arc}\, sen\, x^2 + c$
74. $\frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + c$
75. $-\frac{\ln^2(\cos x)}{2} + c$
76. $\frac{\ln^2(\ln x)}{2} + c$
77. $\frac{1}{2}e^{2\, tg\, x} + c$
78. $\frac{1}{\cos x} + c$
79. $-\sqrt{2-\cos 2x} + c$
80. $-\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + c$
81. $e^{-sen\, x} + c$
82. $-x\cos x + sen\, x + c$
83. $\frac{x\ sen\, 3x}{3} + \frac{\cos 3x}{9} + c$
84. $\frac{x^3\ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + c$
85. $x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x + 6\ e^x + c$
86. $\frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{9}\ x\ e^{3x} + \frac{2}{27}\ e^{3x} + c$
87. $x e^x - e^x + c$
88. $x\ \text{arc}\, sen\, x + \sqrt{1-x^2} + c$
89. $\frac{x\sqrt{(1+2x)^3}}{3} - \frac{1}{15}\sqrt{(1+2x)^5} + c$
90. $\frac{x^2\ \text{arc}\, tg\, x}{2} - \frac{x}{2} + \frac{\text{arc}\, tg\, x}{2} + c$
91. $-x^2\cos x + 2x\ sen\, x + 2\cos x + c$
92. $x\ (\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + c$
93. $2\sqrt{x}\ e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + c$
94. $\frac{2\sqrt{x^3}\ln x}{3} - \frac{4\sqrt{x^3}}{9} + c$
95. $x\ \text{arc}\, tg\, x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c$
96. $x^2\ sen\, x + 2x\cos x - 2\ sen\, x + c$
97. $2x\sqrt{1+x} - \frac{4\sqrt{(1+x)^3}}{3} + c$
98. $\frac{x\ sen(\ln x) - x\cos(\ln x)}{2} + c$
99. $2x\ tg\, x + 2\ln|\cos x| + c$
100. $2\sqrt{x}\ \ln x - 4\sqrt{x} + c$
101. $-e^{-x}(x^2-x) - e^{-x}(2x-1) - 2e^{-x} + c$
102. $x^2\frac{e^{x^2}}{2} - \frac{e^{x^2}}{2} + c$

103. $x \ln x - x + c$

104. $\dfrac{e^x \cos x + e^x \,sen\, x}{2} + c$

105. $\dfrac{e^x \,sen\, x - e^x \cos x}{2} + c$

106. $-\dfrac{x\, e^{-3x}}{3} - \dfrac{e^{-3x}}{9} + c$

107. $x\, tg\, x + \ln |\cos x| + c$

108. $x\, sen\, x + \cos x + c$

109. $-\dfrac{\ln x}{2x^2} - \dfrac{1}{4x^2} + c$

110. $-x^2 \cos x + 2x\, sen\, x + 2 \cos x + c$

111. $\dfrac{e^{-3x}\, sen\, x}{10} - \dfrac{3e^{-3x} \cos x}{10} + c$

112. $\dfrac{x^2}{2} (\ln x)^2 - \dfrac{x^2}{2}\ln x + \dfrac{x^2}{4} + c$

113. $\dfrac{x^4}{4} \ln |x| - \dfrac{x^4}{16} + c$

114. $\ln |x| \,.\, \ln (\ln |x|) - \ln |x| + c$

115. $-2x\sqrt{1-x} - \dfrac{4\sqrt{(1-x)^3}}{3} + c$

116. $-(x - 3) \cos x + sen\, x + c$

117. $x \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| - \sqrt{1+x^2} + c$

118. $-\sqrt{1-x^2}\ arcsen\, x + x + c$

119. $\dfrac{x^2}{2}\ arcsen\, x^2 + \dfrac{1}{2}\sqrt{1-x^4} + c$

120. $\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}\ (\ln x)^2 - \dfrac{8}{9}\sqrt{x^3}\ (\ln x) + \dfrac{16}{27}\sqrt{x^3} + c$

121. $2x - 7 \ln | x+2 | + c$

122. $\dfrac{1}{4} \ln \left|\dfrac{x-2}{x+2}\right| + c$

123. $\dfrac{4}{5} \ln |x+3| + \dfrac{1}{5}\ln |x-2| + c$

124. $2 \ln |x+2| - 2\ln |x+3| + c$

125. $\ln |x| + \ln |x-1| - \dfrac{2}{x-1} + c$

126. $\dfrac{1}{2} \ln |x| - \dfrac{1}{2} \ln |x+2| + c$

127. $x + \ln |x-2| - 2 \ln |x+3| + c$

128. $\dfrac{x^2}{2} - x - \ln |x| + 2 \ln |x+1| + c$

129. $x - \ln |x+1| + \ln |x-1| + c$

130. $\ln \left|\dfrac{x+1}{x}\right| - \dfrac{1}{x} + c$

131. $\dfrac{1}{6} \ln \left|\dfrac{x-3}{x+3}\right| + c$

132. $\dfrac{1}{4} \ln \left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| - \dfrac{1/2}{x-1} + c$

133. $-3 \ln |x| + 2\ln |x-1| + \ln |x+2| + c$

134. $\ln |x| - \dfrac{1}{x-1} + c$

135. $x^2 - \ln |x+1| + c$

136. $\ln |x+1| + \ln |x-2| + \dfrac{2}{x-2} + c$

137. $\dfrac{1}{2} \ln |x+3| + \dfrac{3}{2} \ln |x-1| + c$

138. $\ln |x+1| - \dfrac{3}{x-2} - 2 \ln |x+2| + c$

139. $-\ln |x| - \dfrac{1}{x} + \ln |x+1| + c$

140. $-\dfrac{7}{3\,(x-2)} - \dfrac{2}{3\,(x+1)} + c$

141. $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + 4x + \ln \left|\dfrac{x^2\,(x-2)^5}{(x+2)^3}\right| + c$

142. $x - 2\ arctg\, x + c$

143. $2 \ln \left|\dfrac{x-2}{x}\right| + \dfrac{3}{x-2} + c$

144. $-3 \ln |x-1| + \dfrac{2}{x-1} + 3 \ln |x-2| + c$

145. $\ln |x| - \dfrac{1}{2} \ln |x^2+x+1| - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\ arctg\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$

146. $\dfrac{1}{2}\ arctg\left(\dfrac{x}{2}\right) + c$

147. $\dfrac{1}{2}\ arctg\left(\dfrac{x-1}{2}\right) + c$

148. $\ln \left|\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}\right| - \sqrt{3}\ arctg\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$

149. $\ln |x| + 2 \ln |x^2-6x+25| + 4\ arctg\, \dfrac{x-3}{4} + c$

150. $\dfrac{1}{x-1} + arctg\, x + c$

151. $\dfrac{x}{4} + x^3 + x^2 - 3x + c$

152. $e^x + 3x + c$

153. $-e^{-x} + \dfrac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} - \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{(2x)^2} - \dfrac{1}{x} + c$

154. $x^2 e^x - 2x\, e^x + 2\, e^x + c$

155. $\dfrac{-1}{9\,(3x+1)^3} + c$

156. $\ln \left| 5 + 3x + \dfrac{2}{3}x^3 \right| + c$

157. $\dfrac{-1}{2\,(x^2+x)^2} + c$

158. $x\, tg\, x + \ln | \cos x | + c$

159. $5\, arctg\, e^x + c$

160. $\dfrac{1}{2}\, tg\, x^2 + c$

161. $\dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{sen\, 2x}{2}\right) + c$

162. $tg\, x - x + c$

163. $2x + tg\, x + c$

164. $arcsen\, x - \sqrt{1-x^2} + c$

165. $\dfrac{\sqrt{(2+x^2)^3}}{3} + c$

166. $10\sqrt{1 + sen\, x} + c$

167. $\dfrac{e^{2x}}{2} + x - e^{-x} + c$

168. $arc\,sen \left(\dfrac{x}{3}\right) + c$

169. $3x^2\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt{(x^2+1)^3} + c$

170. $\left(\dfrac{5}{3}\right)^x \cdot \dfrac{1}{\ln (5/3)} + c$

171. $-\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x} + c$

172. $-2\, cotg(x^3) + tg\,(4x) + c\,2$

173. $-\dfrac{1}{2}\, e^{-2x-1} + c$

174. $\dfrac{1}{2}\ arctg\left(\dfrac{x}{2}\right) + c$

175. $\dfrac{1}{3} \ln |x^3+4| + c$

176. $\dfrac{1}{3}\ arctg\,(e^{3x}) + c$

177. $\dfrac{1}{2}\, e^{-5x^2} + c$

178. $\dfrac{tg^2 x}{2} + c$

179. $-\ln |\cos x| + c$

180. $\dfrac{sen\, 5x}{5} + \dfrac{3 \cos 2x}{2} + c$

181. $\dfrac{1}{2}\ arctg(x^2+3) + c$

182. $\dfrac{\ln^2 |x|}{2} + c$

183. $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{e^x \cos x + e^x\, sen x}{2} + c$

184. $\dfrac{2}{1-tg(x/2)} + c$

185. $e^{sen\, x} + c$

186. $\dfrac{sen^4 x}{4} - \dfrac{sen^6 x}{6} + c$

187. $\dfrac{1}{2}\ sen(1+x^2) + c$

188. $2 \ln |1+\sqrt{x}| + c$

189. $2\ln |x-3| - \ln |x+3| + c$

190. $5 \ln |2+e^x| + c$

191. $\dfrac{2\sqrt[6]{x^9}}{3} + \dfrac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + \dfrac{6\sqrt[6]{x^7}}{7} + c$

192. $tg(x) + c$

193. $x - \sqrt{x} - 2\ln |\sqrt{x}+1| + c$

194. $\dfrac{tg^4 x}{4} + c$

195. $e^{tg\, x} + c$

196. $\dfrac{1}{5} \ln |9+5x^2| + c$

197. $\dfrac{2x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + 4x - 3\ln |x+1| + c$

198. $\ln |sen\, x| - 2\ln |\cos x| + c$

199. $\dfrac{-1}{2\, sen^2 x} + c$

200. $arcsen\,(x^2) + c$

REGLAS DE DERIVACIÓN

SUMA		**PRODUCTO**	
$y = u + v$	$y' = u' + v'$	$y = u\,v$	$y' = u'v + u\,v'$
RESTA		**COCIENTE**	
$y = u - v$	$y' = u' - v'$	$y = \dfrac{u}{v}$	$y' = \dfrac{u'v - u\,v'}{v^2}$

DIRECTAS		**COMPUESTAS**	
$y = k$	$y' = 0$		
$y = x$	$y' = 1$	$y = u$	$y' = u'$
$y = k\,x$	$y' = k$	$y = k\,u$	$y' = k\,u'$
$y = x^2$	$y' = 2\,x$	$y = u^2$	$y' = 2\,u\,u'$
$y = x^n$	$y' = n\,x^{n-1}$	$y = u^n$	$y' = n\,u^{n-1}u'$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{u}$	$y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$y = \dfrac{1}{x}$	$y' = \dfrac{-1}{x^2}$	$y = \dfrac{1}{u}$	$y' = \dfrac{-u'}{u^2}$
$y = sen\,x$	$y' = \cos x$	$y = sen\,u$	$y' = \cos u \cdot u'$
$y = cos\,x$	$y' = -\text{sen}\,x$	$y = cos\,u$	$y' = -\text{sen}\,u \cdot u'$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^u$	$y' = e^u\,u'$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	$y = a^u$	$y' = a^u \ln a \cdot u'$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$	$y = \ln u$	$y' = \dfrac{u'}{u}$
$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$y = \log_a u$	$y' = \dfrac{u'}{u \ln a}$
$y = tg\,x$	$\begin{cases} y' = 1 + tg^2 x \\ y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \end{cases}$	$y = tg\,u$	$\begin{cases} y' = (1 + tg^2 u)u' \\ y' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = u' \sec^2 u \end{cases}$
$y = cot\,x$	$y' = \dfrac{-1}{sen^2 x}$	$y = cot\,u$	$y' = \dfrac{-u'}{sen^2 u}$
$y = arcsen\,x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$y = arcsen\,u$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
$y = arccos\,x$	$y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$y = arccos\,u$	$y' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
$y = arctg\,x$	$y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$	$y = arctg\,u$	$y' = \dfrac{u'}{1 + u^2}$

DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

1. $\boldsymbol{y = u^v}$
2. $\ln y = \ln(u^v)$
3. $\ln y = v \ln u$
4. $\dfrac{y'}{y} = v' \ln u + v \dfrac{u'}{u}$
5. $y' = y \left(v' \ln u + v \dfrac{u'}{u} \right)$
6. $y' = u^v \left(v' \ln u + v \dfrac{u'}{u} \right)$

Siendo: y, u, v funciones de x; a, k, n constantes

$\int dx = x + C$	$\int a\,dx = ax + C$
$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$	$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$	$\int u' u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ (n \neq -1)$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{u'}{u} dx = \ln\lvert u\rvert + C$
$\int \frac{1}{x+a} dx = \ln\lvert x+a\rvert + C$	$\int \frac{u'}{u+a} dx = \ln\lvert u+a\rvert + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int u' e^u dx = e^u + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (a>0, a\neq 1)$	$\int u' a^u dx = \frac{a^u}{\ln a} + C,\ (a>0, a\neq 1)$
$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$	$\int u' \operatorname{sen} u dx = -\cos u + C$
$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$	$\int u' \cos u dx = \operatorname{sen} u + C$
$\int \tan x dx = -\ln\cos x + C$	$\int u' \tan x dx = -\ln\cos u + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{u'}{\cos^2 u} dx = \tan u + C$
$\int (1+\tan^2 x) dx = \tan x + C$	$\int u'(1+\tan^2 u) dx = \tan u + C$
$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{u'}{\operatorname{sen}^2 u} dx = -\cot u + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + C$	$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \operatorname{arcsen} u + C$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$	$\int \frac{u'}{1+u^2} dx = \arctan u + C$
$\int \frac{1}{a^2+b^2x^2} dx = \frac{1}{ab}\arctan\frac{bx}{a} + C$	$\int \frac{u'}{a^2+b^2u^2} dx = \frac{1}{ab}\arctan\frac{bu}{a} + C$

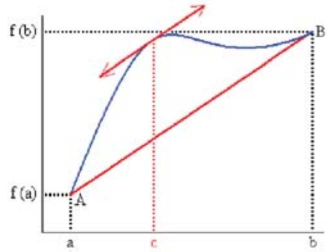
Integral de la suma o resta	$\int (u \pm v) dx = \int u dx \pm \int v dx$
Integración por partes	$\int u dv = uv - \int v du$
Regla de Barrow **(Fórmula de Newton–Leibniz)**	$\int_a^b f(x) dx = F(x)\big\rvert_a^b = F(b) - F(a)$

Siendo: ***u***, ***v*** funciones de ***x***; ***a***, ***n***, ***C*** constantes.

TEORÍA BLOQUE ANÁLISIS

- **Definición e interpretación geométrica del teorema del valor medio del cálculo diferencial**

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
Es decir, habrá un punto intermedio c en el que la pendiente de la recta tangente sea igual a la pendiente del segmento $\overline{AB}$

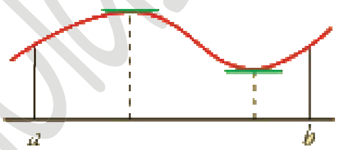


Interpretación geométrica: Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), existe algún punto intermedio en la que la tangente gráfica de $f(x)$ es paralela a la cuerda que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

SOL: (0,5 enunciado + 0,5 interpretación geométrica)
Jun. 2016 / Jun. 2014 / Sep. 2014 / Jun. 2012 / Jun. 2009

- **Enunciado e interpretación geométrica del teorema de Rolle**

Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), y además $f(a) = f(b)$ entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

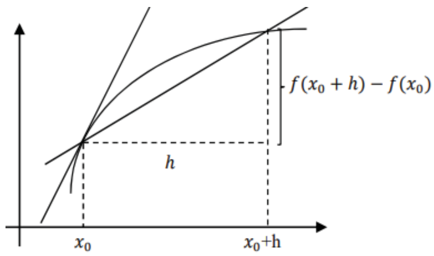


Interpretación geométrica:
Si se cumplen las hipótesis del teorema, existe por lo menos un punto $c \in (a,b)$ en el que la recta tangente es paralela al eje de abscisas (al eje x).
Son puntos de tangente horizontal (máximos o mínimos relativos)

SOL: (0,5 enunciado + 0,5 interpretación geométrica)
Jul. 21 / Jul. 19 / Sep. 18 / Jun. 16 / Jun. 14 / Jun. 13 / Sep. 12 / Jun. 11 / Sep. 08 / Jun. 07

- **Definición e interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto**

Se dice que $f(x)$ es derivable en el punto x_o, si existe y es finito el siguiente límite:
$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_o)}{h}$
Se representa por $f'(x_o)$ y se llama derivada de $f(x)$ en x_o.



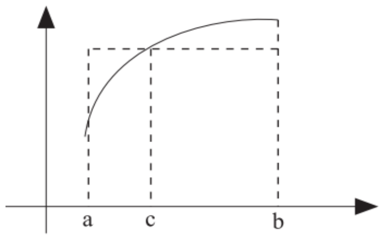
Interpretación geométrica:
La recta secante que pasa por los puntos $(x_0,\ f(x_0)), (x_0+h,\ f(x_0+h))$ tiene por pendiente $\frac{f(x_0+h)-f(x_o)}{h}$ y cuando $h \to 0$, esta secante se acerca a la recta tangente pasando por el punto $(x_0,\ f(x_0))$. Así:

$$\text{Pendiente de la recta tangente en } (x_0,\ f(x_0)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_o)}{h} = f'(x_o)$$

SOL: (0,5 enunciado + 0,5 interpretación geométrica)
Sep. 2016 / Jun. 2015 / Sep. 2015 / Sep. 2010 / Jun. 2008 / Sep. 2004 / Jun. 2000

- **Enuncia e interpreta geométricamente el teorema del valor medio del cálculo integral**

Si $f(x)$ es una función continua en un intervalo $[a,b]$, existe un punto $c \in (a,b)$ tal que $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$



Interpretación geométrica: El área encerrada por la gráfica de una función continua en un intervalo cerrado, el eje OX y las rectas $x = a, x = b$ es igual al área de un rectángulo de base $b-a$ y altura $f(c)$, siendo $f(c)$ el valor que toma la función en un punto intermedio c.

SOL: (0,5 enunciado + 0,5 interpretación geométrica)
Sep. 2012 / Sep. 2010 / Sep. 2009 / Jun. 2006 / Jun. 2005 / Sep. 2001

- **Enunciado del teorema de Weierstrass**

Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, la función alcanza en ese intervalo un máximo y mínimo absoluto. Es decir, existen dos números $c, d \in [a,b]$ tales que para cualquier $x \in [a,b], f(d) \leq f(x) \leq f(x)$ *SOL: (0,5 puntos) / Jun. 2008*

- **Enuncia el teorema fundamental del cálculo integral**

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$, entonces la función $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ es derivable, y además $F'(x)=f(x)$ para todo $x\epsilon(a,b)$.

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$, y $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, entonces $F(x)$ es derivable en (a,b) y además $F'(x)=f(x)$.

SOL: (0,5 puntos)
Sep. 2016 / Sep. 2014 / Sep. 2012 / Jun. 2010 / Jun. 2007 / Sep. 2007 / Sep. 2005

- **Definición primitiva de una función y enuncia la regla de Barrow**

Se dice que $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$ si $F'(x)=f(x)$.

Regla de Barrow: Si $f(x)$ es contina en $[a,b]$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

SOL: (0,5 primitiva + 0,5 Barrow)
Jun. 2015 / Sep. 2013 / Sep. 2011 / Sep. 2008 / Sep. 2006 / Jun. 2000

- **Define función continua en un punto**

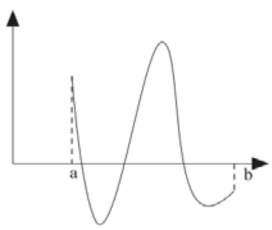
Una función $f(x)$ se dice continua en un punto x_0 si:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Existe y es finito } \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\\ \text{Existe } f(x_o)\end{array}\right\} \quad \text{Los valores coinciden: } f(x_o)=\lim_{x\to x_0} f(x)$$

SOL: (0,5 puntos)
Jun. 2015 / Jun. 2014 / Jun. 2010 / Jun. 2009 / Sep. 2004 / Jun. 2000

- **Enuncia el teorema de Bolzano**

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$, y el signo de $f(a)$ es distinto de $f(b)$ (es decir, $f(a)\cdot f(b)<0$), entonces existe por lo menos un punto $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.



Interpretación geométrica: Si una función continua en un intervalo cerrado toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces la función corta al eje OX por lo menos en un punto.

SOL: (0,5 enunciado + 0,5 interpretación geométrica)
Jul. 2021 / Jul. 2019 / Jun. 2013 / Jun. 2012 / Sep. 2011 / Sep. 2009 / Sep. 2007 / Jun. 2003

- **Define función derivable en un punto**

Una función $f(x)$ se dice derivable en un punto x_0 si existe y es finito el siguiente límite:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

También, una función $f(x)$ se dice derivable en un punto x_0, si es continua en x_0 y las derivadas laterales coinciden.

SOL: (0,5 puntos)
Jun. 2011

- **Define integral indefinida de una función**

Se llama integral indefinida de $f(x)$ al conjunto de todas las primitivas de $f(x)$. Se representa por $\int f(x)dx=F(x)+C$.

El símbolo $\int$ se llama integral, mientras que $f(x)dx$ recibe el nombre de integrando, $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ y C es la constante de integración.

SOL: (0,5 puntos)
Jun. 2011 / Sep. 2006

- **¿Cuándo se dice que una discontinuidad es evitable?**

Se dice que $f(x)$ tiene una discontinuidad evitable en el punto $x=x_0$, si existe el límite en el punto, pero la función en ese punto tiene un valor distinto o no existe:

$\exists \lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ pero $f(x)=\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ o bien $\nexists f(x)$.

SOL: (0,25 puntos)
Jun. 2010

ANÁLISIS

2012

JUNIO. Opción A

3. a) Enuncia el teorema de Bolzano. Probar que $f(x) = x^3 + 2x - 4$ corta al eje OX en algún punto del intervalo $[1,2]$. ¿Puede cortar en más de un punto?

b) Calcula $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{x^2+x+2}\right)^{1/x^2}$ *SOL A: sólo corta en un punto (1p); SOL B: $e^{-1/2}$ (1p)*

4. Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de la parábola $y = 3x - x^2$ y su recta normal en el punto $(3,0)$. (Para el dibujo de la gráfica indicar puntos de corte con ejes, vértice de la parábola, concavidad y convexidad)

SOL A: 500/81 u^2 (2p)

JUNIO Opción B

3. a) Determina los valores de a para que la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sea continua. ¿Es derivable en $x = 1$ para algún valor de a?

$$f(x) = \begin{cases} a - x^2 & x \le 1 \\ \dfrac{2}{ax} & x > 1 \end{cases}$$

b) Enunciado e interpretación geométrica del teorema del valor medio del cálculo diferencial

SOL A: a=-1 ó a=2; No es derivable para ningún valor. (1p): SOL B: (1p)

4. Calcula $\int_2^3 \frac{5x^3-3x+1}{x^3-x}dx$ *SOL: 5 – 1/2 ln3 + 3/2 ln2 (2p)*

SEPTIEMBRE Opción A

3. a) Calcula las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$

b) Calcula $\int_1^e \frac{(x-1)^2}{x^2+1}dx$ *SOL A: No asint. verticales, y=1 asint. vertical. No horizontales (1p)*

SOL B: e-ln(e^2+1)-1+ln2=0,2845 (1p)

4. a) De una función derivable $f(x)$ sabemos que pasa por el punto $(0,1)$ y su derivada es $f'(x) = xe^{2x}$. Calcula $f(x)$ y la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto correspondiente a $x = 0$.

b) Enuncia el teorema fundamental del cálculo integral.

SOL A: f(x)=1/2xe^{2x}-1/4e^{2x}+5/4; y=1; (2p)

SEPTIEMBRE Opción B

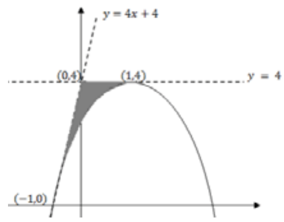
3. a) Enunciado e interpretación geométrica del teorema de Rolle.

b) Si $c > 2$, calcula los valores de a, b, c para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & si\ x < 2 \\ x + 1 & si\ x \ge 2 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, c]$.

SOL A: (1p); SOL B: a=-3, b=5, c=4 (1p)

4. Dibuja y calcula el área de la región limitada por la parábola $y = -x^2 + 2x + 3$, la recta tangente en el punto donde la parábola tiene un extremo y la tangente a la parábola en el punto donde la tangente es paralela a la recta $y = 4x$. (Nota: para dibujar las gráficas, Indicar puntos de corte con ejes, vértice de la parábola y concavidad o convexidad)

SOL: A=2/3u^2 (2p)



2013

JUNIO. Opción A

3. a) Enuncia el teorema de Bolzano. ¿Tiene la ecuación $x^3 + 2x - 2 = 0$ alguna solución en el intervalo $(0, 1)$. ¿Tiene esta ecuación más de una solución real?

b) Calcula los valores de a y b para que $\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-e^{2x}}{sen(x^2)} = 1$

SOL A: sólo tiene 1 solución real (1p); SOL B: a=3, b=2 (1p)

4. a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los intervalos de concavidad y convexidad de la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

b) Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ y la bisectriz del primer cuadrante. (Para el dibujo de la gráfica es suficiente utilizar el apartado anterior y calcular los puntos de corte con ejes).

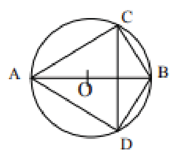
SOL A: crece (-∞, 2/3) y (2, ∞); decrece (2/3, 2); cóncava (-∞, 4/3); convexa (4/3, ∞) (1 punto)

SOL B: 37/12 u^2 (1 punto)

JUNIO Opción B

3. En una circunferencia de centro O y radio 10 cm se traza un diámetro AB y una cuerda CD perpendicular a ese diámetro. ¿A qué distancia del centro O de la circunferencia debe estar la cuerda CD, para que la diferencia entre las áreas de los triángulos ADC y BCD sea máxima?

SOL: $5\sqrt{2}\ cm$(2p)



4. a) Enuncia el teorema de Rolle. Determina el valor de a para que sea aplicable el teorema de Rolle a la función $f(x) = x^3 + ax - 1$, en el intervalo $[0, 1]$. Para este valor de a, calcula un punto $c \in (0, 1)$ en el que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ sea paralela al eje OX

b) Calcula $\int \frac{x^3+3}{x^2-x}dx$

SOL A: a=-1, c=$\sqrt{3}/3$ (1 punto) SOL B: $\frac{1}{2}x^2 + x - 3\ln|x| + 4\ln|x-1| + C$ (1 punto)

SEPTIEMBRE Opción A

3. a) Calcula $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}+1}{xe^x}$

b) Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[1,4]$ tal que $\int_1^2 f(x)dx = 2$ y $\int_1^4 f(x)dx = -4$, ¿cuál es el valor de $\int_2^4 5f(x)dx$? Enuncia las propiedades de la integral definida que utilices.

SOL A: ∞ (1p); SOL B: -30 (1p)

4. Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de la parábola $f(x) = -x^2 + 9x$ y las rectas $y = 20$, $x - y + 15 = 0$. (Para el dibujo de la gráfica indicar puntos de corte con ejes, vértice de la parábola, concavidad y convexidad)

SOL A: 7/6 u^2 (2p)

SEPTIEMBRE Opción B

3. Calcula el dominio, las asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos de la función $f(x) = \frac{2x+1}{e^{x^2}}$ *SOL: no asíntotas. Max (1/2,2/e$^{3/4}$), min(-1,-1/e) (2p)*

4. a) Define primitiva de una función y enuncia la regla de Barrow

b) Calcula $\int_2^3 \frac{x^3+2}{x^2-1}dx$ *SOL: 1/4+ 1/2 ln6 (1 punto)*

2014

JUNIO. Opción A

3. a) Define función continua en un punto. ¿Qué tipo de discontinuidad tiene $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-2x}$ en los puntos $x = 0$ y $x = 2$?

b) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 1$ en su punto de inflexión.

SOL A: x=0 salto ∞, x=2 evitable (1p); SOL B: y=-6x+3 (1p)

4. a) Calcula: $\lim_{x\to1} \frac{\ln(2x-1)}{x^2-\sqrt{x}}$

b) Calcula $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx$ *SOL A: 4/3 (1 punto) SOL B: ln[(3e+3)/(2e+4)] (1 p)*

JUNIO Opción B

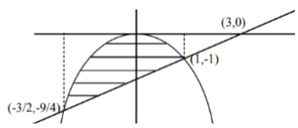
3. a) Dada la función $f(x) = \frac{ax+b}{cx-1}$ calcula los valores de a, b, c sabiendo que $x = \frac{1}{2}$ es una asíntota vertical y que $y = 5x - 6$ es una recta tangente a su gráfica en el punto correspondiente a $x = 1$. Para los valores de a, b, c calculados, ¿posee $f(x)$ más asíntotas?

b) Enuncia el teorema del valor medio del cálculo diferencial. ¿Se puede aplicar, en el intervalo $[0, 1]$, este teorema a la función $f(x) = \frac{1}{2-x}$? En caso afirmativo, calcula el punto al que hace referencia el teorema.

SOL A: a=3, b=-4, c=2, asíntota y=3/2 (1p); SOL B: si; c=2-$\sqrt{2}$ (1p)

4. Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de la parábola $f(x) = -x^2$ y la recta normal a la gráfica de $f(x)$ en el punto correspondiente a $x = 1$. (Para el dibujo de la gráfica indicar puntos de corte con ejes, vértice de la parábola, concavidad y convexidad)

SOL A: 125/48 u^2 (2p)



SEPTIEMBRE Opción A

3. a) Calcula: $\lim_{x\to0} \frac{cosx-e^{-2x}-2x}{sen^2x}$

b) Queremos dividir un hilo metálico de 70 metros de longitud en tres partes de manera que una de ellas tenga doble longitud que otra y además que al construir con cada parte un cuadrado, la suma de las áreas de los tres cuadrados sea mínima. Calcula la longitud de cada parte.

SOL A: -5/2 (1p); SOL B: 15cm, 30, 25 cm (1p)

4. a) La segunda derivada de una función $f(x)$ es $f''(x) = 4e^{2x} - 2x$. Además, la tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(0, 1)$ es paralela a la recta $x - y + 3 = 0$. Calcula $f(x)$

b) Calcula $\int_0^{\pi/2} xsen(2x+\pi)dx$ *SOL A: $f(x) = e^{2x} - \frac{x^3}{3} - x$ (1p) SOL B: -π/4 (1p)*

SEPTIEMBRE Opción B

3. Dada la función $f(x) = \begin{cases} mx & x < 1 \\ ax^2 + bx + 1 & x \geq 1 \end{cases}$

a) Calcula los valores de a, b, m para que $f(x)$ sea derivable en $x = 1$ y tenga un extremo relativo en x=3.
b) Enuncia el teorema del valor medio del cálculo diferencial. Para los valores $a = 1,\ b = -6,\ m = -4$ calcula, si existe, un punto $c \in (0,5)$ tal que la tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = c$ sea parapela al segmento que une los puntos $(0,0)$ y $(5,-4)$

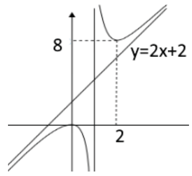
SOL A: a=1, b=-6m=-4 (1p); SOL B: c=13/5 (1p)

4. a) Calcula $\int_0^1 \frac{2}{3+3e^x}dx$
b) Enuncia el teorema fundamental del cálculo integral. Si $F(x) = \int_0^x \frac{2}{3+3e^t}dt$, calcula $\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}$

SOL A: $\frac{2}{3} + \ln\frac{2e}{1+e}$ *(1p); SOL B: 1/3 (1p)*

2015 JUNIO. Opción A

3. Dibuja la gráfica de $f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$ estudiando: dominio, simetrías, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de concavidad y convexidad.



SOL: (2p)

4. a) Define primitiva de una función y enuncia la regla de Barrow.
b) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, determina a, b y c sabiendo que $y = 2x + 1$ es la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto correspondiente a la abscisa $x = 0$ y que $\int_0^1 f(x)dx = 1$.

SOL A: (1p); SOL B: b=2, c=1, a=-4 (1p)

JUNIO Opción B

3. a) Definición e interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto *SOL: (1p)*
b) Calcular los valores de b y c para que la función sea derivable en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \ln(e + x^2) & x < 0 \\ x^2 + bx + c & x \geq 0 \end{cases}$$

SOL: c=1, b=0 (1p)

4. La gráfica de la función $f(x)$ pasa por el origen de coordenadas y la derivada es $f'(x) = (2-x)e^{3x}$
Determina la función $f(x)$ y calcula los intervalos de concavidad y convexidad de $f(x)$

SOL: f(x)=e^{3x}(7/9-x/3)-7/9; Convexa (-∞, 5/3); Cóncava (5/3, ∞) (2p)

SEPTIEMBRE Opción A

3. a) Calcula los valores de a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & x \leq 1 \\ \frac{2\ln x + 2}{x^2} & x > 1 \end{cases}$ sea derivable en $x = 1$.
b) Para los valores $a = -4$ y $b = 6$, determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

SOL A: a=-4, b=6 (1p); SOL B: creciente (-∞, 3/4); decreciente (3/4, ∞) (1 punto)

4. Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de la parábola $y = 4x - x^2$ y las rectas tangentes a la gráfica de $f(x)$ en los puntos correspondientes a $x = 0$ y $x = 2$. (Para el dibujo de la parábola, indica: puntos de corte con los ejes, el vértice, concavidad y convexidad)

SOL: 2/3 u² (2p) (rectas tangentes: y=4x, y=4)

SEPTIEMBRE Opción B

3. a) Define derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica.
b) Dada la función $f(x) = 2e^{-x}(x+1)$, calcula: intervalos de crecimiento, decrecimiento, máx y mínimos. *SOL A: (1p); SOL B: crec.(-∞, 0); decrec.(0, ∞); Max(0,2)(1p)*

4. a) Calcula: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2-\frac{x}{4}}{x^2}$
b) Calcula una primitiva de la función $f(x) = x\ senx$ que pase por el punto $(\pi, 0)$

SOL A: -1/64 (1 punto) SOL B: f(x)= -x cosx + senx - π (1 punto)

2016 JUNIO. Opción A

3. a) Definición e interpretación geométrica del teorema del valor medio del cálculo diferencial.
b) Calcula los siguientes límites: i. $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-\sqrt{2-x}}$ ii. $\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$

SOL A: (1p); SOL B: i)=2/3, ii)=1/2 (1p)

4. La derivada de una función $f(x)$ es $(0,\infty)$, y $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$
a) Determinar la función f(x) sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(1,0)$
b) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad de $f(x)$

SOL A: f(x)=lnx/x + K; K=0 (1p); SOL B: cóncava (0, e^{3/2}), convexa (e^{3/2}, ∞) (1p)

JUNIO. Opción B

3. a) Enunciado e interpretación geométrica del teorema de Rolle

b) Sea $f(x) = 2x + \frac{5}{2}\ln(1 + x^2)$. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto correspondiente a $x = 0$. Determina, si existen, los máximos y mínimos relativos de $f(x)$.

SOL A: (1p); SOL B: y=2x; máx. (-2, -4+5ln5/2); min. (-1/2, -1+5ln(5/4)/2) (1p)

4. a) Dada la función $f(x) = \begin{cases} ax + 2 & x < 1 \\ 3(x-2)^2 & x \geq 1 \end{cases}$ ¿Es $f(x)$ derivable en $x = 1$, para algún valor de a?

b) Para $a = 1$, calcula el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$ en el eje OX.

SOL A: No derivable para ningún valor (1p); SOL B: A=11/2 u²(1p)

SEPTIEMBRE. Opción A

3. a) Definición e interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.

b) De una función $f(x)$ sabemos que $f(-1) = 1$ y que su derivada es $f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 0 \\ e^{2x} - 2 & x \geq 0 \end{cases}$ Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de $f(x)$ en los puntos $x = -2$ y $x = \frac{\ln 2}{2}$

SOL A: (1p); SOL B: $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & x < 0 \\ 1/2\, e^{2x} - 2x - \frac{3}{2} & x \geq 0 \end{cases}$*; y=-5x-5; y=1/2+ln2 (1p)*

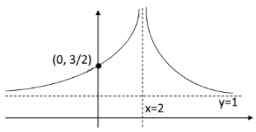
4. Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de la parábola $y = x(x-2)$, el eje de abscisas y la recta $y = x$. (Para el dibujo de la parábola, indica: puntos de corte con los ejes, el vértice, concavidad y convexidad

SOL 19/6 u² (2p)

SEPTIEMBRE. Opción B

3. Dibuja la gráfica de $f(x) = 1 + \frac{2}{(x-2)^2}$ estudiando: dominio, simetrías, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de concavidad y convexidad.

SOL: (2p)



4. a) Enuncia el teorema fundamental del cálculo integral. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $F(x) = \int_0^x \frac{t^2+6}{2+e^t}dt$, en el punto de abscisa $x = 0$.

b) Calcula $\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$

SOL A: y=2x (1p); SOL B: 1/4 (1p)

2017

JUNIO. Opción A

a) Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{sen^2 x - 3x^2}{e^{x^2} - cos2x}$

b) Se desea construir una caja de base cuadrada, con tapa y una capacidad de 80 dm³. Para la tapa y la superficie lateral se quiere utilizar un material que cuesta 2€/dm² y para la base otro que cuesta 3€/dm². Calcula las dimensiones de la caja para que su coste sea mínimo.

c) Calcula $\int_0^1 x\ln(1+x)dx =$

SOL A: -2/3 (0,5p); SOL B: x=4dm, y=5dm (1,25p); SOL C: 1/4 (1,25p)

JUNIO. Opción B

a) Calcula los valores a, b para que la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & x < 3 \\ \ln(x-2) & x \geq 3 \end{cases}$ sea derivable en $x = 3$ y determina el punto en el que la tangente gráfica de $f(x)$ es paralela a la recta $x + 3y = 0$

b) Si $P(x)$ es un polinomio de tercer grado, con un punto de inflexión en el punto $(0{,}5)$ y un extremo relativo en el punto $(1{,}1)$, calcula $\int_0^1 P(x)dx =$

SOL A: a=1/6, b=-3/2, pto(-1,-4/3) (1,5p); SOL B: a=2, b=0, c=-6, d=5. Integral=5/2 (1,5p)

SEPTIEMBRE. Opción A

a) Calcula $\lim_{x\to -\infty} \frac{x+3e^{2x}}{x+e^{2x}} =$ y Calcula $\lim_{x\to +\infty} \frac{x+3e^{2x}}{x+e^{2x}} =$

b) La derivada de una función $f(x)$, que tiene por dominio $(0, \infty)$, es $f'(x) = 1 + \ln x$. Determina la función $f(x)$ teniendo en cuenta que su gráfica pasa por el punto $(1, 4)$.

c) Determina, si existen, los máximos y mínimos relativos de $f(x)$.

SOL A: 1 y 3 (1p); SOL B: f(x) =xlnx+4 (1p); SOL C: min (1/e, 4-1/e) (1p)

SEPTIEMBRE. Opción B

Dada a función $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

a) Estudia, en x=0, la continuidad y derivabilidad de $f(x)$

b) Determina los puntos de $f(x)$ en los que la recta tangente es paralela a la recta $x - 4y = 0$ y determina las ecuaciones de esas rectas tangentes.

c) Calcula $\int_{-1}^0 f(x)dx$

SOL A: continua y derivable (1p); SOL B: y=1/4x+1/4; y=1/4x-1/4 (1p); SOL: Ln2-1 (1p)

2018

JUNIO. Opción A

a) Calcula: intervalos de crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos relativos de $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$

b) Dibuja y calcula el área de la región limitada por la parábola $y = x^2 - 4x$ y la recta $y = x - 4$. (Para el dibujo de la parábola, indica: puntos de corte con los ejes, el vértice, concavidad y convexidad)

SOL A: Max x=2; Crece (0,2) Decrece (-∞,0)U(2, ∞) (1,5p); SOL B: A=9/2u²(1,5p)

JUNIO Opción B

a) Calcula a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} e^x + ax + b & x < 0 \\ \frac{1}{2}(x^2 + 2) & x \geq 0 \end{cases}$ sea contina y derivable en $x = 0$.

b) Calcula los vértices del rectángulo de área máxima que se puede construir, si uno de los vértices es $(0,0)$, otro está sobre el eje X, otro sobre el eje Y, y el otro sobre la recta $2x + 3y = 8$.

c) Calcula $\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$

SOL A: a=-2, b=0 (1p); SOL B: (0,0), (2,0), (0,4/3), (2,4/3) (1p); SOL C: 116/15 (1p)

SEPTIEMBRE Opción A

a) Enuncia el teorema de Rolle. Calcula a, b y c para que la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax & x < 1 \\ bx + c & x \geq 1 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 2]$ y calcula el punto en el que se cumple el teorema.

b) Dibuja y calcula el área de la región limitada por la parábola $y = x^2 - 2x$ y la recta $y = x$. (Para el dibujo de la parábola, indica: puntos de corte con los ejes, el vértice, concavidad y convexidad)

SOL A: c=-2; b=1; a=-3; punto=3/4 (1,5p); SOL B: 9/2 u² (1,5p)

SEPTIEMBRE Opción B

a) Calcula, si existe, el valor de m para que $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x + mx^2 - 1}{sen(x^2)} = 3$

b) Calcula los valores de a, b, c y d para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un punto de inflexión en el punto $(0, 5)$ y la tangente a su gráfica en el punto $(1,1)$ sea paralela al eje X.

c) Calcula $\int_1^e \sqrt{x}\, ln\, x\, dx$

SOL A: m=5 (1p); SOL B: b=0; d=5; a=2;c=-6 (1p); SOL C: 9/2 e^{3/2}+4/9 (1p)

2019

JUNIO. Opción A

a) Mediante integración por partes, demuestra que $\int \ln x\, dx = x(\ln x - 1) + C$. Luego, demuestra la misma igualdad mediante derivación. (1p)

b) Si $f(x) = \begin{cases} \ln x & x \in (0, e] \\ ax + b & x \in (e, \infty) \end{cases}$, di qué relación tiene que existir entre los parámetros a y b para que la función sea continua, y cuáles tienen que ser sus valores para que sea derivable.

c) Calcula el área de la región encerrada por el eje x, la recta y=4 y la gráfica de $f(x) = \begin{cases} \ln x & x \in (0, e] \\ \frac{x}{e} & x \in (e, \infty) \end{cases}$

SOL B: continua si b=1-ae; derivable si a=1/3, b=0 (1p); SOL C: (2e+16-e²)/2e u²(1p)

JUNIO Opción B

Considérese la función $f(x) = x^2 e^{-x}$. Se pide:

a) Calcular los límites $\log_{x\to\infty} f(x)$ y $\log_{x\to-\infty} f(x)$

b) Determinar intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos y puntos de inflexión.

c) Calcula $\int f(x)\, dx$

SOL A: 0; ∞ (1p); SOL B: crece (0,2); min. (0,0); máx. (2,4/e²); Inflexión $(2-\sqrt{2}, 0{,}19), (2-\sqrt{2}, 3{,}41)$ *(1p)*

SOL C: $(-x^2 - 2x - 2)e^{-x} + C$ *(1p)*

JULIO Opción A

a) Enuncia los intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos de la función $f(x) = x^2 lnx$

b) Consideremos un triángulo tal que: dos de sus vértices son el origen $O(0,0)$ y el punto $P(1,3)$, uno de sus lados está sobre el eje X y otro sobre la tangente en $P(1,3)$ a la gráfica de la parábola $y = 4 - x^2$. Se pide calcular las coordenadas del tercer vértice, dibujar el triángulo y calcular, por separado, el área de las dos regiones en las que el triángulo queda dividido por la parábola $y = 4 - x^2$

SOL A: decrece $(0, 1/\sqrt{e})$*; crece* $(1/\sqrt{e}, +\infty)$*; Min en x=* $1/\sqrt{e}$ *(1p)*

SOL B: P(5/2, 0); A1=0,5833 u²; A2=3,1667 u²(2p)

JULIO Opción B

a) De entre todos los triángulos rectángulos con tenidos en el primer cuadrante que tienen un vértice en el origen, otro sobre la parábola $y = 4 - x^2$, un cateto sobre el eje X y el otro paralelo al eje Y, obtén los catetos y la hipotenusa de aquel cuya área es máxima.

b) Enuncia el teorema de Bolzano… (1p)

SOL A: $x = \sqrt{4/3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$*;* $y = 8/3$ *(2p)*

2020

ORDINARIA JULIO 3

a) Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{1+2x-e^{2x}}$

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x(lnx - 1)$. Calcula, si existen, los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.

SOL A: 1/2 (1p); SOL B: decrece(0,1), crece(1,∞), min en x=1 (1p)

ORDINARIA JULIO 4

a) Calcula b y c para que la función $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & x \le 0 \\ x^2 + bx + c & x > 0 \end{cases}$ sea primero continua y luego derivable en $x = 0$.

b) Calcula $\int_1^2 x(lnx - 1)dx$

SOL A: b=2, c=1 (1p); SOL B: ln4-9/4 = 2ln2-3+3/4 (1p)

EXTRAORDINARIA SEPTIEMBRE 3

Determina los valores a, b para que la función $f(x) = \begin{cases} \frac{a-\cos x}{x} & x < 0 \\ bx & x \ge 0 \end{cases}$ sea, primero continua, y luego derivable.

SOL: a=1, b=1/2 (2p)

EXTRAORDINARIA SEPTIEMBRE 4

a) Calcula el área de la región encerrada por el eje X y la gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 1 & x < 0 \\ (x-1)^2 & x \ge 0 \end{cases}$

b) Calcula $\int x\sqrt{x^2 - 1}\,dx$

SOL A: 11/6 u² (1p); SOL B: $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-1)^3}$ *(1p)*

2021

ORDINARIA JUNIO 3

De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos lados sobre los ejes de coordenadas y un vértice sobre la recta $x + 2y = 4$, determine los vértices del que tiene mayor área.

SOL: A(0, 0), B(2, 0), C(2, 1), D(0, 1)

ORDINARIA JUNIO 4

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & x \le 0 \\ -x^2 - x - 1 & x > 0 \end{cases}$, calcule el área de la región encerrada por la gráfica de f y las rectas $y = 4x - 7$ e $y = 1$.

SOL: 7/6 + 17/6 + 2 = 6u²

EXTRAORDINARIA JULIO 3

a) Enuncie el teorema de Bolzano.

b) Obtenga los valores de a, b y c que hacen que $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c$ cumpla $f(0) = 1$ y tenga extremos relativos en $x = \pm 1$. Decir luego si los extremos son máximos o mínimos.

SOL:

EXTRAORDINARIA JULIO 4

a) Enuncie el teorema de Rolle.

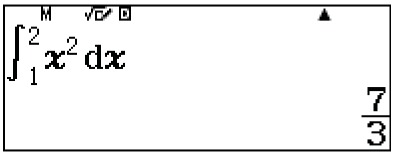
b) Calcule el área de la región encerrada por las gráficas de $f(x) = x + 6$ y $g(x) = \begin{cases} -2x & x < 0 \\ x^2 & x \ge 0 \end{cases}$

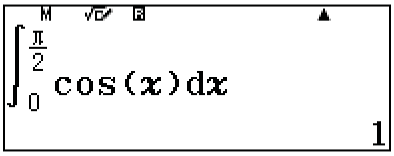
SOL:

CASIO CLASSWIZ fx-570/991 - ANÁLISIS

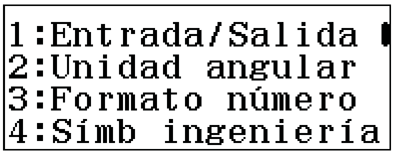
INTEGRAL DEFINIDA

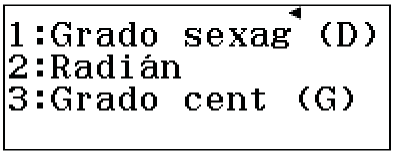
$$\int_1^2 x^2 dx = \quad \text{y} \quad \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx =$$

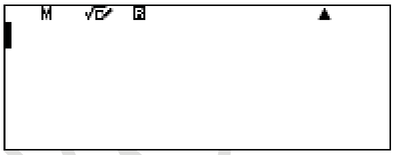




Con SHIFT MENU (SETUP) definimos la unidad angular en radianes para el caso de la 2º integral.

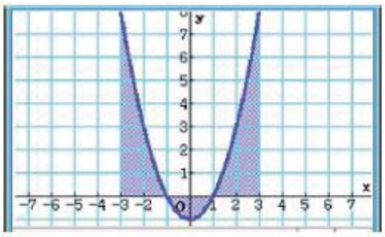




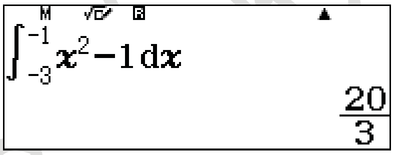


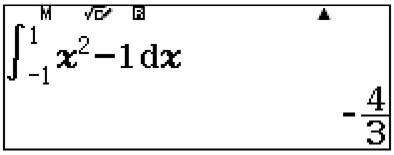
ÁREA DELIMITADA POR UNA CURVA

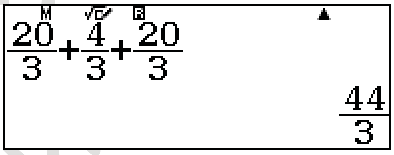
Calcula el área delimitada por $y = x^2 - 1$ entre -3 y 3.



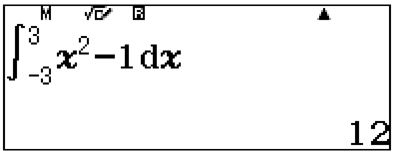
Hay que hacer el cálculo por partes, dividiendo en 3 zonas.



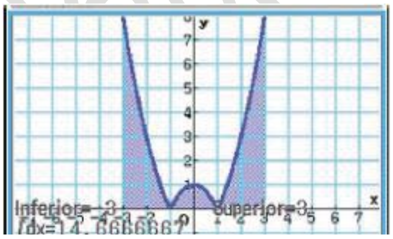


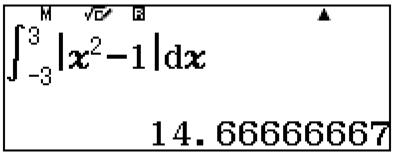


Cuidado con escribir la integral en una sola parte:



Aún así, se puede hacer el cálculo directo del área con valores absolutos SHIFT ((Abs). En este paso, la calculadora puede parecer que tarda un poco en dar el resultado (se queda en blanco unos segundos).





MATRICES

Una matriz es un conjunto de números y/o letras distribuidas en filas y columnas.
Las dimensiones se indican como *Filas x Columnas* → TRUCO: **F**erro**C**arril
Los elementos se expresan como a_{ij}, siendo i → Fila, y j → Columna

$$A_{2x3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B_{3x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{2x2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Diagonal Secundaria

Diagonal Principal

MATRIZ TRASPUESTA DE A

$$A_{2x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad {A^t}_{3x2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

La matriz traspuesta de la matriz A es el resultado de cambiar las filas por las columnas

TIPOS DE MATRICES

Matriz Fila $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Matriz Columna $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Matriz Cuadrada $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Matriz Nula $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matriz Triangular Superior $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

Matriz Triangular Inferior $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

Matriz Diagonal $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

Matriz Escalar $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Matriz Identidad (Identidad) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz Simétrica $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

Antisimétrica $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = -A \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Invertible o regular: tiene A^{-1}
No Invertible o singular: no tiene A^{-1}

SUMA DE MATRICES

Se suman los elementos que ocupan la misma posición

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

PRODUCTO DE MATRICES

Por un nº real: da otra matriz de elementos multiplicados por ese nº

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Multiplicar dos matrices A y B de dimensiones mxn y nxp da una matriz mxp

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 & 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 3 + 6\cdot 4 & 4\cdot 1 + 5\cdot 2 + 6\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 47 & 20 \end{pmatrix}$$

IMPORTANTE:
nº Columnas de la 1º = nº Filas de la 2º para multiplicarlas. AxB ≠ BxA

MATRIZ INVERSA

$A \cdot A^{-1} = I$ $\quad A^{-1} \cdot A = I$ $\quad (A^{-1})^{-1} = A$ $\quad (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Método Gauss-Jordan

Convertir la matriz inicial en la matriz identidad con transformaciones elementales:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow T = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \to 1/2 F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

RANGO DE UNA MATRIZ

Es el nº de filas o columnas de la matriz que son **linealmente independientes**, es decir, que no pueden obtenerse a partir de las demás filas o columnas de la misma matriz.
Para calcular el rango: usar las **transformaciones elementales** para hacer el máximo nº posible de ceros, intentando triangular la matriz (**método de Gauss**).

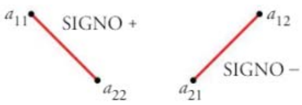
Más fácil por determinantes! (otro tema)

DETERMINANTES

Un determinante es un valor numérico asociado a una matriz. Sólo las cuadradas tienen determinante

DETERMINANTE MATRIZ ORDEN 2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$



DETERMINANTE MATRIZ ORDEN 3 (SARRUS)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

RECUERDA:

Truco: copiamos las dos primeras filas y operamos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

PROPIEDADES

LÍNEA: fila o columna

- Si una matriz tiene una línea de ceros, el determinante es 0
- Si intercambiamos dos líneas entre sí, el determinante cambia de signo
- Si una matriz tiene una línea igual o combinación lineal de las demás paralelas, su determinante = 0.
- (Igualmente, si un determinante = 0 es que tiene alguna línea combinación lineal de las otras.)
- Si multiplicamos un número por un determinante, se multiplica el número por los elementos de sólo una línea (y viceversa)

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \cdot 2 & 2 \cdot 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2a & 2b \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

- Descomposición, en suma:

$$\begin{vmatrix} 1+4 & 2 \\ 3+4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}$$

- Si a una línea le sumamos una combinación lineal de las demás paralelas, su determinante no varía.
- $|A| = |A^t|$
- $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
- $|A^{-1}| = |A|^{-1} = 1/|A|$
- $|aA| = a^n \cdot |A| \rightarrow$ *siendo a un número y A una matriz de orden n*

MENOR COMPLEMENTARIO Y ADJUNTO

- **Menor Complementario**: Es el determinante resultante al tachar la fila i y columna j → α_{ij}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \alpha_{11} = \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{3} & 4 \end{pmatrix} = 4$$

- **Adjunto**: Es el menor complementario multiplicado por $(-1)^{i+j} \rightarrow A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \alpha_{11} = 1 \cdot 4 = 4$$

TRUCO: Regla para signos de los adjuntos $\begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix} \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$

- **Cálculo de determinantes por adjuntos:** Multiplicar los elementos de una línea por sus adjuntos

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&0&1\\4&0&5\end{pmatrix}\rightarrow |A|=1\cdot A_{11}-2\cdot A_{12}+0\cdot A_{13}=(-1)^2\cdot M_{11}+(-1)^3\cdot M_{12}=-22$$

Elegir la línea con más ceros $\rightarrow |A|=2\cdot A_{12}+0\cdot A_{22}+0\cdot A_{32}=(-1)^3\cdot M_{12}=-22$ CUIDADO SIGNOS

Para matrices de orden superior a 3:

  - Elegir la línea que más ceros tenga, y si es posible, un 1. Elegir el número más pequeño como pivote y hacer ceros con el resto.
  - Resolver por método de adjuntos. No olvidar → $(-1)^{i+j}$ *(¡signo del adjunto!)*

- **Matriz adjunta**: Matriz resultante de sustituir cada elemento a_{ij} por su adjunto $A_{ij} \rightarrow adj(A)$

OJO: signos adjuntos $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\rightarrow adj(A)=\begin{pmatrix}+\alpha_{11}&-\alpha_{12}\\-\alpha_{21}&+\alpha_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-3\\-2&1\end{pmatrix}$ RECUERDA: $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot$

MATRIZ INVERSA

La condición necesaria y suficiente para que una matriz tenga inversa, es que su determinante $\neq 0$

$$A^{-1}=\frac{[adj(A)]^t}{|A|}$$

RECUERDA: Muy importante esta condición

EJEMPLO: Calcular matriz inversa de $\begin{pmatrix}1&0\\3&2\end{pmatrix}$

- $|A|=2-0=2\rightarrow$ Como es distinto de 0 tiene inversa
- $adj(A)$

$A_{11}=+\alpha_{11}=2$	$A_{12}=-\alpha_{12}=-3$
$A_{21}=-\alpha_{21}=0$	$A_{22}=+\alpha_{22}=1$

$$adj(A)=\begin{pmatrix}2&-3\\0&1\end{pmatrix}$$

- $[adj(A)]^t=\begin{pmatrix}2&0\\-3&1\end{pmatrix}$
- $A^{-1}=\frac{[adj(A)]^t}{|A|}=\frac{1}{|A|}\cdot[adj(A)]^t=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2&0\\-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\cdot 2&\frac{1}{2}\cdot 0\\\frac{1}{2}\cdot(-3)&\frac{1}{2}\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-3/2&1/2\end{pmatrix}$

RANGO DE UNA MATRIZ

- En principio → más fácil mediante determinantes
- Si hay parámetros → más fácil mediante determinantes
- Si la matriz es de 4x4 → mejor utilizar Gauss
- El rango coincide con la dimensión del mayor determinante ≠ 0

Procedimiento: calculamos los mayores determinantes posibles, y **cuando encontremos el primero ≠0** se acaba el problema. Su dimensión será igual a su rango.

$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&3\\1&1&0\end{pmatrix}\rightarrow |A|=-5\rightarrow$ Como determinante 3x3 ≠ 0 → rang(A)=3

$B=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&3&1\\1&2&-1\end{pmatrix}\rightarrow |B|=0\rightarrow$ rang(B) NO es 3. $\begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix}=1\rightarrow$ rang(B)=2

SISTEMAS DE ECUACIONES

MATRICES ASOCIADAS A UN SISTEMA

Dado el sistema $\begin{cases} 2x-3y+4z=1 \\ 2x+6y+\ z=\ 2 \\ 4x-7y+8z=8 \end{cases}$ tenemos las siguientes matrices asociadas:

$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & -7 & 8 \end{pmatrix}$ Matriz Coeficientes

$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ Matriz incógnitas

$B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ Matriz términos independts.

$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & 8 & 8 \end{array}\right)$ Matriz ampliada

$$\begin{cases} 2x-3y+4z=1 \\ 2x+6y-3z=2 \\ 4x-7y+5z=8 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & -7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

A · X = B

REGLA DE CRAMER

Para resolver Sistemas Compatibles Determinados.

→ Sustituir la matriz de términos independientes por cada columna de la matriz coeficientes (A) y calcular su determinante. Así al dividir dicho determinante entre |A|, tenemos en cada caso x, y, z.

→ MUY IMPORTANTE: Si |A|=0 no podemos resolver por Cramer

OJO: Cramer es sólo una herramienta + para resolver un stma.

EJEMPLO: resuelve $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y+2z=1 \\ 2x+y+2z=0 \end{cases}$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow |A|=1\neq 0 \rightarrow rang(A)=3 \rightarrow puedo\ usar\ Cramer$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|}=-9;\quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{|A|}=4;\quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|}=7;\quad \begin{cases} x=-9 \\ y=4 \\ z=7 \end{cases}$$

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS

Sistemas
- Compatibles
  - Determinados (SCD) Una única solución
  - Indeterminados (SCI) Infinitas soluciones
- Incompatibles (SI) No tiene solución

DISCUSIÓN DE SISTEMAS

Se trata de discutir (clasificar) y/o resolver un sistema de ecuaciones lineales dependiendo de los valores que tome un parámetro.

- Se toma la matriz (A|B) formada por la matriz de coeficientes A y la matriz de términos independientes B. Se estudia el rango de la matriz A en los diferentes casos y se compara con el rango de la matriz A*.

TEOREMA DE ROUCHÉ - FRÖBENIUS

Para discutir el tipo de sistema utilizando los rangos de A y A*.

Si rango (A) = rango (A*) = Nº incógnitas → Sistema Compatible Determinado
Si rango (A) = rango (A*) ≠ Nº incógnitas → Sistema Compatible Indeterminado
Si rango (A) ≠ rango (A*) → Sistema Incompatible

MUY IPORTANTE
Siempre cae

CUIDADO:
Solución (0,0,0) SOLO si es SCD

- **SISTEMA HOMOGÉNEO**

Si el sistema es homogéneo (todas las ecuaciones igualadas a cero), no se utiliza A*:

Si rango (A) = nº de incógnitas → Stma. Compatible Determinado → **Sol. trivial:** $\boldsymbol{x=y=z=0}$
Si rango (A) < nº de incógnitas → Stma. Compatible Indeterminado → **Infinitas soluciones**

ECUACIONES MATRICIALES

Primero despejar la matriz X y luego particularizar para las matrices A, B, C etc. que te indiquen.

Recuerda que para despejar en $AX = B$ se tiene $A^{-1}AX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$

Para despejar en $XA = B$ se tiene $XAA^{-1} = BA^{-1} \rightarrow X = BA^{-1}$

1. Calcula la matriz X que verifica $AX = 2B - C$ siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}$

   Sol: $X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

2. Calcula la matriz X que verifica $A^2X = B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 16 & 5 \end{pmatrix}$

   Sol: $X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

3. Calcula la matriz X que verifica $XA = A + I_2$ siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

   Sol: $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

4. Calcula la matriz X que verifica $(BA - I)X = C$ siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, y $C = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

   Sol: $X = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

5. Calcula la matriz X tal que $AX = A + B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Sol: $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

6. Calcula la matriz X tal que $AX = BC$ siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 16 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

   Sol: $X = \begin{pmatrix} 35 & 13 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$

7. Calcula la matriz X que verifica $ABX = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ siendo $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

   Sol: $X = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 6 \end{pmatrix}$

8. Calcula la matriz X que verifica $AB + X = I$ siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Sol: $X = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

9. Calcula la matriz X de dimensión 2x2 tal que $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

   Sol: $X = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -23 & 14 \end{pmatrix}$

10. Calcula la matriz X que verifica $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 15 \\ 12 & 11 & 10 \end{pmatrix}$

    Sol: $X = \begin{pmatrix} 3 & -11/5 & -4 \\ -13/5 & -22/5 & -5 \end{pmatrix}$

11. Calcula la matriz X cuadrada de orden 2 que verifica $AX + B^t = B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

    Sol: $X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

12. Calcula la matriz X que verifica $A^2X = \frac{1}{2}(A + BC)$ siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

    Sol: $X = \begin{pmatrix} -5/4 & 1/4 \\ 5 & 3/2 \end{pmatrix}$

13. Calcula la matriz X que verifica $XB = B + A$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

    Sol: $X = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 7/3 \\ 7/6 & 1/2 & 7/6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

14. Calcula la matriz X que verifica $XA = A + B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 4 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

    Sol: $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

15. Calcula la matriz X que verifica $XA = 2B + C$ si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -2 & -8 & -6 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Sol: $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

16. Calcula la matriz X que verifica $XC + A = C + A^2$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Sol: $X = I$

17. Resuelve la siguiente ecuación matricial $X\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^2 + 4\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & -20 \end{pmatrix}$

Sol: $X = \begin{pmatrix} 4/5 & -7/10 \\ 12/5 & -31/10 \end{pmatrix}$

En ecuaciones como $AX + X = B$ o $2X + AX = B$ es necesario sacar factor común y escribir, respectivamente, $(A + I)X = B$ o $(2I + A)X = B$ donde I la matriz unidad correspondiente.

18. Calcula la matriz X en cada una de las siguientes ecuaciones si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) $X + A = 3X$
b) $5X + A = X + B$
c) $X + AX = B$
d) $2X + XA = B$
e) $AX + BX = C$
f) $AX + A = BX$

Sol: $a.$ $X = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, $b.$ $X = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 3/4 & 0 \end{pmatrix}$, $c.$ $X = \begin{pmatrix} -2 & -1/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$,
$d.$ $X = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/9 \\ 1 & -1/3 \end{pmatrix}$, $e.$ $X = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$, $f.$ $X = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1/2 & -4/3 \end{pmatrix}$

19. Halla la matriz X en la ecuación $2X - B = AX$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

Sol: $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

20. Halla la matriz X en la ecuación $BX - A = 2X$ siendo $A = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Sol: $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

21. Resuelve la ecuación $AX = BX + C$ siendo $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Sol: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

22. Halla la matriz X en la ecuación $XA^2 - B = X$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

Sol: $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

23. Halla la matriz X en la ecuación $AX + A^{-1}X = I$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Sol: $X = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/10 & 2/5 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$

24. Halla la matriz X en la ecuación $AX - X = B^t$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & -10 \end{pmatrix}$

Sol: $X = \begin{pmatrix} -8 & 11 \\ -2/3 & 7/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

25. Resuelve $XA + XA^t = C$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Sol: $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

26. Resuelve $(A - B)X - A^tX = I$ siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Sol: $X = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ -1 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

27. Resuelve $(A - B)X - A^tX = I$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sol: $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

TEORÍA BLOQUE ÁLGEBRA

- **Define menor complementario y adjunto de un elemento de una matriz cuadrada**

Dada una matriz cuadrada de orden n, se llama menor complementario del elemento a_{ij}, al valor del determinante de la matriz de orden $n-1$ que resulta de suprimir la fila i y la columna j. Se representa por α_{ij}.
Se llama adjunto del elemento α_{ij} a: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$, es decir, es el menor complementario con su signo con el signo cambiado, según que $i + j$ sea par o impar.

SOL: (0,5 menor complementario + 0,5 adjunto)
Sep. 2015 / Jun. 2014

- **¿Cuándo un sistema de ecuaciones lineales se dice homogéneo? ¿Puede ser incompatible un sistema de ecuaciones lineales homogéneo? Justifica.**

Un sistema de ecuaciones lineales se dice homogéneo cuando los términos independientes son todos cero. Por lo tanto, en un sistema lineal homogéneo siempre el rango de la matriz de coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada ya que, al ser los términos independientes nulos, la columna que se añade no influye a efectos del cálculo del rango.
Por lo tanto, un sistema de ecuaciones lineales homogéneo es siempre compatible.

SOL: (0,5 + 0,5)
Sep. 2013

TEORÍA BLOQUE GEOMETRÍA

- **Define el producto vectorial de dos vectores.**

El producto vectorial de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es otro vector que se representa por $\vec{u} \times \vec{v}$ y que se obtiene del siguiente modo:

1. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son no nulos y no proporcionales, entonces $\vec{u} \times \vec{v}$ es el vector de
   I. Módulo: $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot sen(\widehat{u,v})$
   II. Dirección: perpendicular a $|\vec{u}|$ y a $|\vec{v}|$
   III. Sentido: hacia arriba si $(\widehat{u,v}) < 180°$ y hacia abajo si $(\widehat{u,v}) > 180°$ (tomando el ángulo en sentido positivo, es decir, contrario al movimiento de las agujas de reloj)
2. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes, es decir, si alguno de ellos es $\vec{0}$ o si tienen la misma dirección, entonces $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$

SOL: (0,75)
Jun. 2014

ÁLGEBRA

2012

JUNIO. Opción A

a) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} m & m & m^2 \\ 1 & m^2 & m^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, estudia, según los valores de m, el rango de la matriz A

b) Resuelve, si es posible, el sistema: $A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

SOL A: m≠-1,0,1 -> rang (A)=3; m=-1,0 -> rang(A)=2; m=1 -> rang(A)=1 (0,5 valores m + 1,5p)
SOL B: m=1 -> x=1-λ-μ, y=λ, z=μ (1p)

JUNIO. Opción B

Dado el sistema $\begin{cases} x-2y+3z=5 \\ x-3y+2z=-4 \end{cases}$

a) Calcula el valor de α para que al añadirle la ecuación $\alpha x+y+z=9$, resulte un sistema compatible indeterminado. Resuélvelo, si es posible, para $\alpha=0$.

b) ¿Existe algún valor de α para el cual el sistema con estas 3 ecuaciones no tiene solución?

SOL A: SCI cuando α=0 (1p), con α=0 -> x=23-5λ, y=9-λ, z=λ (1p)
SOL B: el sistema siempre tiene solución (1p)

SEPTIEMBRE. Opción A

a) Calcula, según los valores de α, el rango de $A=\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ a+1 & a & 0 \\ 0 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$.
Para $a=1$, calcula el determinante de la matriz $2A^t\cdot A^{-1}$

b) Sea $B=\begin{pmatrix} -1/2 & x & 0 \\ y & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula x e y para que se cumpla que $B^{-1}=B^t$

SOL A: α≠0, -1, -1/2 -> rang(A)= 3; a=0, -1, -1/2 -> rang(A)= 2; α=1 -> det=$2^3\cdot 6\cdot 1/6=8$ (2p)
SOL B: $x=y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ o $x=y=-\sqrt{3}/2$ (1p)

SEPTIEMBRE. Opción B

a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema d $\begin{cases} x+y=m \\ x-my=-13 \\ 3x+5y=16 \end{cases}$

b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m=2$.

SOL A: m=2 o m=5/3 -> rang(C)=rang(C)=2= nº incog. SCD; m≠2, 5/3 -> rang(C)= 2 < rang(C*) SI (2p)*
SOL B: x=-3, y=5 (1p)

2013

JUNIO. Opción A

Dadas las matrices $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, sea B^t la matriz traspuesta de B y I la matriz identidad de orden 3,

a) Estudia, según los valores del parámetro λ, el rango de $AB^t+\lambda I$

b) Calcula la matriz X que verifica: $AB^tX-X=2B$

SOL A: rang =3 si λ≠0; rang =1 si λ=0 (1,5p); SOL B: a=-8, b=4, c=-2 (1,5p)

JUNIO. Opción B

a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+my+z=2 \\ mx-y+z=0 \\ 2x-y+2z=1 \end{cases}$

b) Resuélvelo, si es posible, para el caso $m=1$.

SOL A: m=-1/2 -> rang(C)=2 < 3=rang(C). SI / m=1 -> rang(C)= 2 =rang(A)<nº incog SCI.*
m≠ -1/2 y m≠1 -> rang(C)= 3 = rang (C) = nº incog SCD (0,5p valores m) (1,5p discutir)*
SOL B: x=λ; y= 1; z=1-λ (1p)

SEPTIEMBRE. Opción A

a) Sea M una matriz cuadrada de orden 2 tal que $M^2=4M$. Determina la matriz X que verifica la ecuación matricial $(M-2I)^2X=I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

b) Determina todas las matrices B de la forma $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ que verifiquen $B^2=4B$. Si alguna es inversible, calcula su inversa.

c) ¿Cuándo un sistema de ecuaciones lineales se dice homogéneo? ¿Puede ser incompatible un sistema de ecuaciones lineales homogéneo? Justifica la respuesta.

SOL A: X=$\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ (0,5p); SOL B: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ (1p); inversa: $\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ (0,5p)
SOL C: (0,5 + 0,5)

SEPTIEMBRE. Opción B

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$

a) Calcula, según los valores de m, el rango de A

b) ¿Coincide A con su inversa para algún valor de m? Para $m = 0$, calcula A^{60}

c) Si $m = 2$ y A es la matriz de coeficientes de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, ¿podemos afirmar que el sistema tiene solución única? Justifica tu respuesta.

SOL A:m=+ -1 rang(A)=2; m≠+-1 rang(A)=3 (1p); SOL B: $A^{60} = (A^2)^{30} = I^{30} = I$ (0,5 A=A^{-1}, 0,5 A^{60})

SOL C: m=2 -> rang(A)=3 -> SCD única solución (1p)

2014

JUNIO. Opción A

a) Discute, según los valores del parámetro m, el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$

b) ¿Coincide A con su inversa para algún valor de m?

c) Determina una matriz simétrica X de orden 2 tal que $X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y el determinante de la matriz $3X$ sea -9

SOL A: m=1 o m=-1 -> rang(A)=2 / m≠ +-1 -> rang(A)=3 (1p)

SOL B: no, nunca (0,5p); SOL C: $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

JUNIO. Opción B

c) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x - y - 2z = m + 9 \\ mx + 3y - z = 0 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases}$

d) Resuélvelo, si es posible, cuando $m = -9$.

SOL A: m=-9 -> rang(C)=rang(C)=2 < 3=nº inc. SCI / m≠9 -> rang(C)=rang(C*)=3=nº inc SCD (2p)*

SOL B: x=λ; y=3λ; z=0 (1p)

SEPTIEMBRE. Opción A

a) Define menor complementario y adjunto de un elemento en una matriz cuadrada

b) Sea I la matriz identidad de orden 3 y $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determina los valores de λ para los que $A + \lambda I$ no tiene inversa.

c) Calcula la matriz X que verifica $AX - A = 2X$, siendo A la matriz dada en el apartado b.

SOL A: (1p)

SOL B: A+ λI no tiene inversa para λ=-3, λ=-1, λ=1 (1p); SOL C: $X = \begin{pmatrix} 5/3 & 0 & 4/3 \\ 2/3 & -1 & 4/3 \\ 4/3 & 0 & 5/3 \end{pmatrix}$ (1,5p)

SEPTIEMBRE. Opción B

a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + my + (m-1)z = m \\ (m-1)y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m = 3$.

SOL A: m=1 o m=2 -> rang(C)=2 < 3=rang(C) SI / m≠2 o m≠1 -> rang(C)=3 =rang(C*)=nº inc SCD (2p)*

SOL B: x=3/2; y=-3/2; z=3 (1p)

2015

JUNIO. Opción A

a) Calcula los posibles valores de a, b, c para que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ verifique la relación $(A - 2I)^2 = 0$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y 0 la matriz nula de orden 2.

b) ¿Cuál es la solución de un sistema homogéneo de dos ecuaciones con dos incógnitas, si la matriz de coeficientes es una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ verificando la relación $(A - 2I)^2 = 0$?

c) Para $a = b = c = 2$, calcula matriz X que verifica $A \cdot X = A^{-1} \cdot B$, siendo $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

SOL A: $a = 2, b \in \mathbb{R}, c = 2$ (1p); SOL B: x=y=0 (0,5p); SOL C: $= \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & -2 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$(1,5p)

JUNIO. Opción B

a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones $\begin{cases} mx + 3y + 4z = m \\ x - 4y - 5z = 0 \\ x - 3y - 4z = 0 \end{cases}$

b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m = 0$ y cuando $m = 1$.

SOL A: m=-1 -> rang(C)=2 < 3=rang(A). SI / m≠-1 -> rang(C)= 3 =rang(A)=nº incog SCD (1p rangos)(1p discutir)

SOL B: para m=0 -> x=y=z=0 (0,5p); : para m=1 -> x=1/2; y= -1/2; z=1/2 (0,5p)

SEPTIEMBRE. Opción A

a) Define menor complementario y adjunto de un elemento en una matriz cuadrada

b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

I. Calcula el rango, según los valores de λ, $de\ A - \lambda I$, siendo I la matriz unidad de orden 3

II. Calcula la matriz X que verifica $XA - 2A = 3X$

SOL A: (1p)

SOL B: λ≠0; λ≠1; λ≠2 -> rang(A- λI)=3 ; λ=0, λ=1, λ=2 -> rang(A- λI)=2 (1p); $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ (1p)

SEPTIEMBRE. Opción B

a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y + z = m \\ x - y = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$

b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m = 0$.

SOL A: m=0 -> rang(C)=rang(A)=2 < 3=nº inc. SCI / m ≠0 -> rang(C)=2 ≠ 3=rang(A) SI (2p)

SOL B: x= -1/2 λ; y= -1/2 λ; z=λ (1p)

2016 JUNIO. Opción A

a) Calcula todas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix}$ de rango 2 tales que su inversa sea $A - 2I$, es decir, $A^{-1} = A - 2I$, siendo I la matriz unidad de orden 2.

b) Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} m+2 & -1 & m+1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ -1 & -2 & m+1 \end{pmatrix}$

i. Calcula, según los valores de m, el rango de M

ii. Para el valor $m = -1$, calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tales que $MX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

SOL A: planteamiento (1p); a=1, b=2; a=-1, b=2 (0,5p)

SOL B: $m = \mathbb{R} - (-3, -1) \rightarrow$ rang(M)=3; $m = -3, m = -1 \rightarrow$ rang(M)=2 (0,75p); X= $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$ $\lambda \in \mathbb{R}$(0,75p)

JUNIO. Opción B

c) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones $\begin{cases} mx + 3y + 4z = m \\ x - 4y - 5z = 0 \\ x - 3y - 4z = 0 \end{cases}$

d) Resuélvelo, si es posible, cuando $m = 0$ y cuando $m = 1$.

SOL A: m=-1 -> rang(C)=2 < 3=rang(A). SI / m≠-1 -> rang(C)= 3 =rang(A)=nº incog SCD (1p rangos)(1p discutir)

SOL B: para m=0 -> x=y=z=0 (0,5p); : para m=1 -> x=1/2; y= -1/2; z=1/2 (0,5p)

SEPTIEMBRE. Opción A

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a-2 & 1 \\ a-1 & a & -1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula, según los valores de a, el rango de A. Calcula, si existe, la inversa de A cuando $a = 0$.

b) Para $a = 0$, calcula la matriz que verifica $AXA^{-1} - A = 2I$

c) Para $a = 1$, calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tales que $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

SOL A: a=1 -> rang(A)=2 (0,5); a≠1 -> rang(A)=3 (0,5); $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ (0,5p)

SOL B: $B = A + 2I = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (1p); SOL C: $X = \begin{pmatrix} -2\lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$ (1p)

SEPTIEMBRE. Opción B

a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 4x + my + 3z = m \\ 2x + 3y + z = 3 \end{cases}$

b) Resuélvelo cuando $m = 5$.

SOL A: m=5 -> rang(C)=rang(A)=2 < 3=nº incog. SCI / m≠5 -> rang(C)=rang(A)=3=nº incog SCD (2p)

SOL B: x=2-2λ; y=λ; z= -1+λ (1p)

2017

JUNIO. Opción A

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determina, según los valores de λ, el rango de la matriz $AA^t - \lambda I$, siendo A^t la matriz traspuesta de A e I la matriz unidad de orden 2.

b) Determina la matriz $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ que verifica la ecuación matricial $AA^tX = 6X$.

SOL A: (0,25p) AA^t-λI=$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 3 & 3-\lambda \end{pmatrix}$; (0,75p) rango: λ≠0 y λ≠6 rang(AA^t-λI)=2; λ=6 o λ=0 rang(AA^t-λI)=1

SOL B: (1p) X=$\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$; $a \in \mathbb{R}$

JUNIO. Opción B

a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x \quad\quad - z = m \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m = 1$.

SOL A: (1p) m=1 -> rang(C)=2=rang(A)=2 < 3=nº incog. SCI / m≠1 -> rang(C)=2 < 3=rang(A) SI

SOL B: (1p) x=1+λ; y=0; z=λ

SEPTIEMBRE. Opción A

Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

d) Determina, según los valores de k, el rango de las matrices AB y BA

e) Para el valor $k = 0$, determina las matrices X que verifican $ABX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

SOL A: rang(AB)=2 (0,5); si k=-2 rang(BA)=1; si k≠2 rang(BA)=2 (0,5p); SOL B: X=$\begin{pmatrix} -\lambda \\ 4\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$; $\lambda \in \mathbb{R}$ *(1p)*

SEPTIEMBRE. Opción B

a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x - 2y \quad\quad = 0 \\ x \quad - y \quad + z = m \\ x + my - 2z = m \end{cases}$

b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m = 0$.

SOL A: m=0 -> rang(C)=rang(A)=2 < 3=nº incog. SCI / m≠0 -> rang(C)=rang(A)=3=nº incog SCD (1p)

SOL B: x=2λ; y=3λ; z=λ (1p)

2018

JUNIO Opción A

a) Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} m & m+4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula los valores de m para que la matriz inversa de M sea ¼ M.

b) Dadas las matrices $A = (-1 \quad 0 \quad 1)$, $B = (3 \quad 0 \quad 1)$, $C = (4 \quad -2 \quad 0)$, calcula la matriz X que verifica: $B^t \cdot A \cdot X + C^t = X$, siendo B^t y C^t las traspuestas de B y C respectivamente.

SOL A: m=-1 (1p); SOL B: $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4/3 \end{pmatrix}$*(1p)*

JUNIO Opción B

a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x - 6y + mz = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = m \end{cases}$

b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m = 3$.

SOL A: (1p) m=3 -> rang(C)=2=rang(A)<nº incog. SCI / m≠3 -> rang(C)=3=rang(A)=nº incog. SCD

SOL B: x=-λ/3+2; y=λ/3+1; z=λ (1p)

SEPTIEMBRE Opción A

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) ¿qué relación existe entra su inversa A^{-1} y su traspuesta A^t?

b) Estudia, según los valores de λ, el rango de $A - \lambda I$, siendo I la matriz identidad de orden 3. Calcula las matrices X que verifican $AX + X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

SOL A: A^{-1}=A^t (0,5p); SOL B: si λ=-1 rang(A-λI)=2; si λ≠-1 rang(A-λI)=3; X=$\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$ *(1,5p)*

SEPTIEMBRE Opción B

a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x \quad\;\; -z=m \\ x+y-z=1 \end{cases}$

b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m=1$.

SOL A: (1p) m=1 -> rang(C)=2=rang(A)=2 < 3=nº incog. SCI / m≠1 -> rang(C)=2 < 3=rang(A) SI

SOL B: (1p) x=1+λ; y=0; z=λ

2019 **JUNIO Opción A**

a) Suponiendo que A y X son matrices cuadradas y que la matriz $A+I$ es invertible, despeja X en la ecuación $A-X=AX$

b) Si $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcula X tal que $A-X=AX$

SOL A: X=(A+I)$^{-1}$A (1p); SOL B: $X=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ *(1p)*

JUNIO Opción B

a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x- \quad y+ \qquad 3z=0 \\ \qquad my+(3-m)z=-6 \\ 2x- \quad y+ \qquad mz=6 \end{cases}$

b) Resuélvelo, si es posible, en los casos $m=0$ y $m=4$.

SOL A: m=0 -> rg(A)=2=rg(B) SCI / m=3 -> rg(A)=2; rg(B)=3, SI / m≠0 y m≠3 -> rg(A)=rg(B)=3 SCD (1,25p)

SOL B: m=0 -> x=α, y=-6+2α, z=-2 / m=4 -> x=-9, y=0, z=6 (0,75p)

JULIO Opción A

a) Despeja X en la ecuación $XA+B=C$, sabiendo que A es una matriz invertible.

b) Calcula X tal que $XA+B=C$ si $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

SOL A: $X=(C-B)A^{-1}$ *(0,75p); SOL B:* $X=1/5\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 7 & -3 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$*(1,25p)*

JULIO Opción B

a) Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema $\begin{cases} x- \qquad y+ \qquad 3z=m \\ \qquad my- \qquad 2z=-2 \\ x+(m-1)y+(m+3)z=m \end{cases}$

b) Resuélvelo, si es posible, en los casos $m=0$ y $m=2$.

SOL A: m≠0 y m≠-2 -> rg(A)=rg(B)=3 SCD / m=0 -> rg(A)=rg(B)=2 SCI / m=-2 -> rg(A)=2 y rg(B)=3 SI (1,25p)

SOL B: m=0 -> x=α, y=3+α, z=1 / m=2 -> x=0, y=-1/2, z=1/2 (0,75p)

2020 **ORDINARIA JULIO 1**

Sean A y B dos matrices que cumplen $A+B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A-B=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

a) Calcular A^2-B^2 (Nota: en este caso $A^2-B^2 \neq (A+B)(A-B)$.)

b) Calcular la matriz X que cumple la igualdad $XA+(A+B)^t=2I+XB$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^t$ la traspuesta de $A+B$

SOL A: $\begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$*; SOL B:* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

ORDINARIA JULIO 2

a) Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema $\begin{cases} mx \;\; + \; y \qquad = 2m \\ \;\; x \qquad\quad + \; z \; = 0 \\ \;\; x \;\; + my \qquad = 0 \end{cases}$

SOL A: $m \neq \pm 1 \; y -> \; rg(A)=rg(B)=3 \; SCD \; / \; m=\pm 1 -> \; rg(A)=2 \; \neq rg(B)=3 \; SI \; / \; m=-1$

EXTRAORDINARIA SEPTIEMBRE 1

Para la ecuación matricial $A^2X+AB=B$, se pide:

a) Despejar X suponiendo que A (y por tanto A^2) es invertible, y decir cuáles serían las dimensiones de X y de B si A tuviera dimensión 4×4 y B tuviera 3 columnas.

b) Resolverla en el caso en que $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

EXTRAORDINARIA SEPTIEMBRE 2

Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} (m+3)x \; - \; m^2y \; = \; 3m \\ (m+3)x \; + \; my \; = \; 3m+6 \end{cases}$

2021

ORDINARIA JUNIO 1

Sea $A=(a_{ij})$ la matriz de dimensión 3×3 definida por $a_{ij}=\begin{cases}1 & si\ i=2\\ (-1)^j(i-1) & si\ i\neq 2\end{cases}$. Explique si A y $A+I$ son o no invertibles, y calcule las inversas de las matrices cuando existan. (Nota: a_{ij} es el elemento de A que está en la fila i y en la columna j, e I es la matriz identidad.)

SOL: A no es invertible. A+I sí: $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1/4 & 1/4 & 1/4\\ -3/2 & 1/2 & -1/2\end{pmatrix}$

ORDINARIA JUNIO 2

Discute, según los parámetros de m, el sistema $\begin{cases}x+2y=m\\ my+3z=1\\ x+(m+2)y+(m+1)z=m+1\end{cases}$.

SOL: m≠0 y m≠2 → SCD. m=0 → SI. m=2 → SCI

EXTRAORDINARIA JULIO 1

Despeja X en la ecuación $B(X-I)=A$, donde I es la matriz identidad y A y B son matrices cuadradas, con B invertible. Luego, calcula X si $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ -2 & 2 & -2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1/3\end{pmatrix}$

SOL:

EXTRAORDINARIA JULIO 2

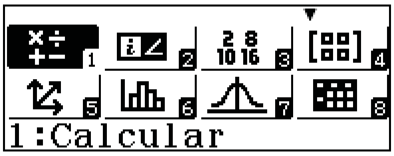
Discute, según los parámetros de m, el sistema $\begin{cases}mx+y+z=2m\\ mx+(m+1)y+z=1\\ mx+(m+1)y+2z=m+1\end{cases}$

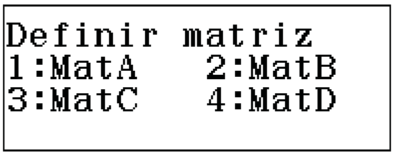
SOL:

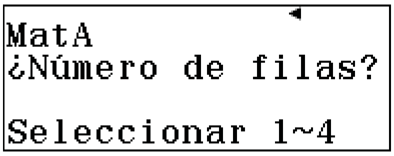
CASIO CLASSWIZ fx-570/991 - ÁLGEBRA

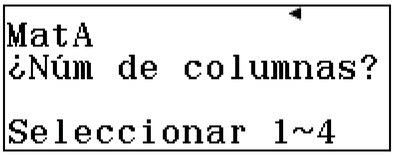
SUMA DE MATRICES

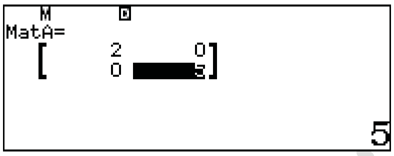
$A\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix}+B\begin{pmatrix}4&8\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&8\\1&7\end{pmatrix}$ Entramos en el menú matriz MENU 4 y definimos la matriz A.



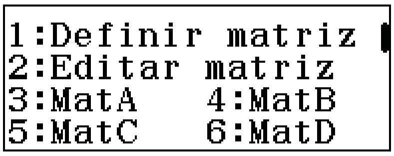


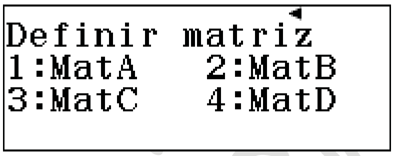


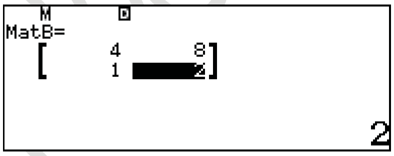




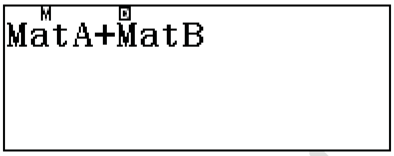
Vamos dando al = para aceptar cada valor. Con OPTN definimos la matriz B (podemos definir hasta 4)

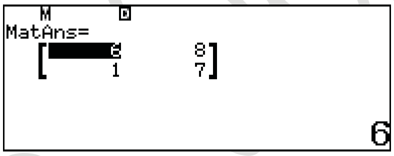






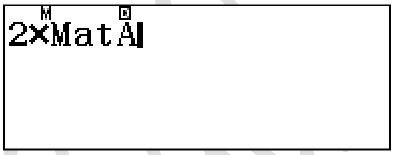
Con OPTN de nuevo, podemos elegir las matrices y vamos operando normalmente.

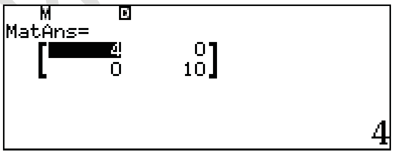




PRODUCTO DE MATRICES

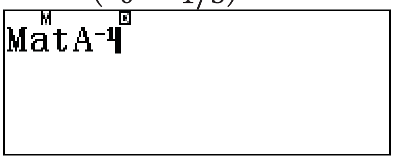
$2\cdot A\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\0&10\end{pmatrix}$ Con OPTN de nuevo elegimos las matrices y operamos normalmente.

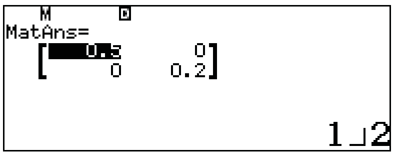


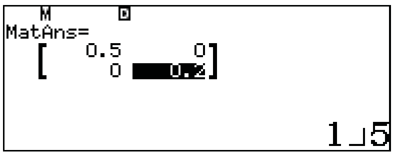


MATRIZ INVERSA

$A^{-1}=\begin{pmatrix}1/2&0\\0&1/5\end{pmatrix}$ No hay función propia de inversa. Hay que elevarla a -1.

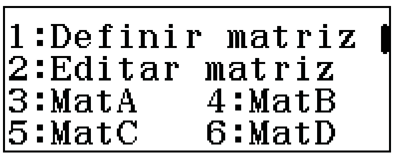






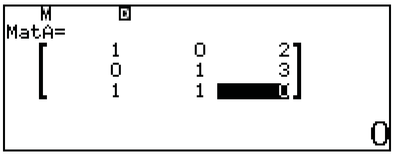
DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

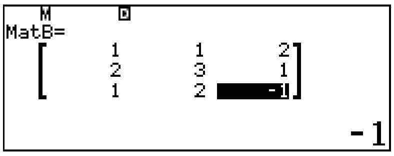
$\left|A\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix}\right|=10$ Vamos pasando por el menú con las flechas ▼ y ▲



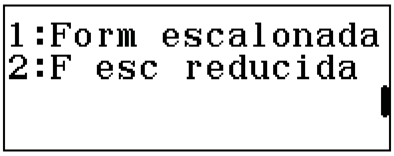
RANGO DE UNA MATRIZ

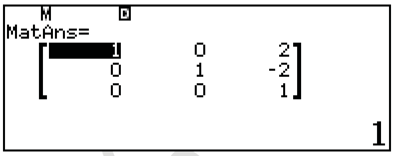
$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&3\\1&1&0\end{pmatrix}\rightarrow rang(A)=3;\ B=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&3&1\\1&2&-1\end{pmatrix}\rightarrow rang(B)=2$$



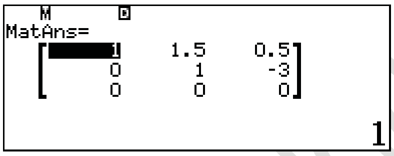


Hacemos la matriz escalonada (de Gauss) con OPTN y comprobamos filas no nulas. Ése será el rango.





Comprobamos que la matriz A tiene rango 3: tres filas no nulas.

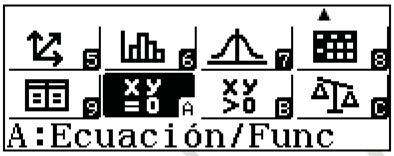


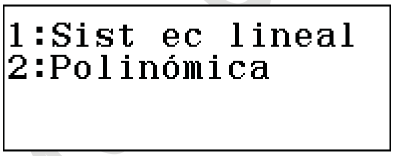
La matriz B en cambio tiene rango 2.

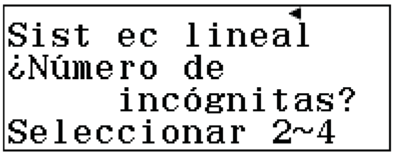
REGLA DE CRAMER

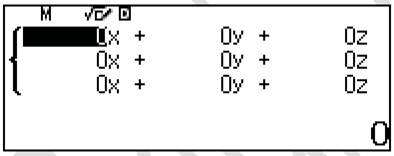
$$\begin{cases}x+y+z=2\\x-y+2z=1\\2x+y+2z=0\end{cases}$$

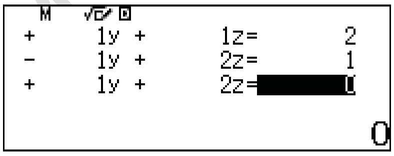
Elegimos sistema lineal de 3 incógnitas y lo definimos. Vemos las soluciones con el =.

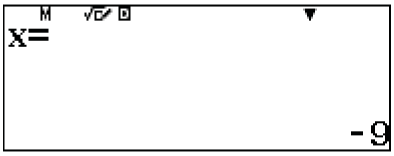


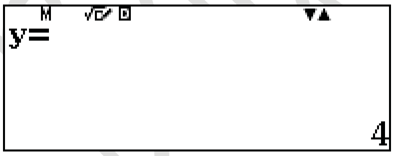


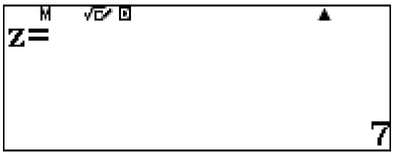




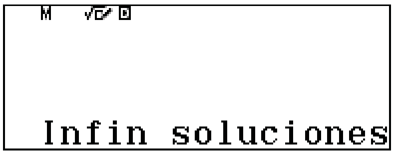








$$\begin{cases}x+y+z=2\\x+y+z=2\\2x+y+2z=0\end{cases}$$



Si tiene infinitas soluciones, nos lo indica.
Y entonces habría que resolverlo y dejar dos incógnitas en función de la tercera.

$$\begin{cases}x+y+z=2\\x+y+z=5\\2x+y+2z=0\end{cases}$$

Si no tiene solución también nos lo indica.

VECTORES EN EL ESPACIO

BASE DE UN SISTTEMA DE VECTORES

Un conjunto de vectores forma una base del espacio y se denota por $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ si:

- $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ son linealmente independientes
- Cualquier otro vector se puede escribir como combinación lineal de ellos

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n$$

Base **ORTOGONAL**: los vectores que forman la base son perpendiculares entre sí.
Base **ORTONORMAL**: además de lo anterior, los vectores tienen la misma longitud (unitarios)
Base R^3 → los tres vectores son linealmente independientes.

$$\vec{\imath}(1,0,0) \to eje\ x \qquad \vec{\jmath}(0,1,0) \to eje\ y \qquad \vec{k}(0,0,1) \to eje\ z$$ ← Base canónica

SIMPLIFICACIONES

Un punto NO se puede simplificar NUNCA.
Un vector se puede simplificar generalmente, EXCEPTO para calcular áreas y volúmenes.
Un plano se puede simplificar ← Planos: mejor simplificados y con las x positivas

MÓDULO DE UN VECTOR $\vec{u}(x_1, y_1, z_1) \to |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Con $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ el punto medio del segmento AB es $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right) = \frac{A+B}{2}$

Da un nº

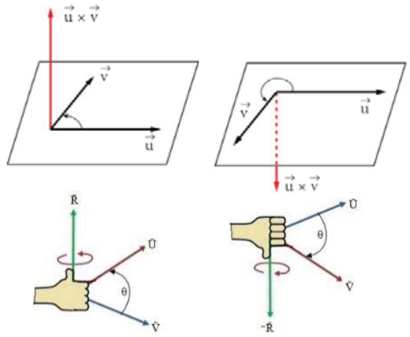
PRODUCTO ESCALAR $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2\ (b.\,ortogonal)$

Da un vector

PRODUCTO VECTORIAL

Se llama producto vectorial, $\vec{u}\times\vec{v}$ al **vector**:

- De módulo $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot sen\ \alpha$
- Dirección perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$
- Sentido: Si $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) < 180º$ ↑ - Si $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) > 180º$ ↓
- Si son linealmente dependientes: $\vec{u}\times\vec{v} = (0,0,0)$ (paralelos)



Propiedades:

- $\vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u}$
- $\vec{u}\times\vec{u} = (0,0,0)$
- $\vec{u}\times\vec{v} = (0,0,0)$ si los dos vectores son paralelos
- $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{w}$ → implica que $\vec{w}\perp\vec{u}$ y $\vec{w}\perp\vec{v}$
- Los vectores de la base $\mathcal{B} = (\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ cumplen $\vec{\imath}\times\vec{\jmath} = \vec{k},\quad \vec{\jmath}\times\vec{k} = \vec{\imath},\quad \vec{k}\times\vec{\imath} = \vec{\jmath}$
- $(a\vec{u})\times\vec{v} = a(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{u}\times(a\vec{v})$
- En general $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} \neq \vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$
- $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{v} + \vec{u}\times\vec{w}$
- Si $\vec{u}(x_1,y_1,z_1), \vec{v}(x_2,y_2,z_2) \to \vec{u}\times\vec{v} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$

CRITERIO DE PERPENDICULARIDAD Y PARALELISMO

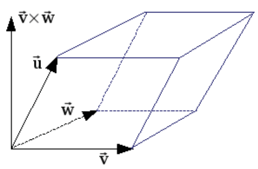
De dos vectores ambos no nulos: $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$ ← MUY IMPORTANTE
Vectores $\vec{u},\vec{v}$ paralelos $si \to \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$, o bien si → $\vec{u}\times\vec{v} = (0,0,0)$

➔ Si dos vectores son paralelos o linealmente independientes, su producto vectorial es el vector nulo.

PRODUCTO MIXTO DE VECTORES

Da un nº

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$



Si $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 0$ → vectores coplanarios (en el mismo plano)

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u},\vec{w},\vec{v}] = [\vec{v},\vec{u},\vec{w}] = [\vec{v},\vec{w},\vec{u}] = [\vec{w},\vec{u},\vec{v}] = [\vec{w},\vec{v},\vec{u}]$$

VECTORES UNITARIOS

Son aquellos que tienen módulo 1 unidad.

Para calcular el unitario de un vector $\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$:

- Dividir cada coordenada por el módulo: $\left|\overrightarrow{u1}\right| = \left(\frac{x_1}{|\vec{u}|}, \frac{y_1}{|\vec{u}|}, \frac{z_1}{|\vec{u}|}\right)$

PROYECCIÓN VECTOR $\vec{u}$ SOBRE $\vec{v}$

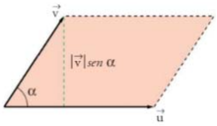
$$Proy_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|} = |\vec{u}| \cdot cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$

ÁNGULO ENTRE VECTORES

$$cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

ÁREA PARALELOGRAMO

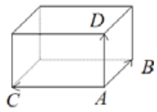
$$A = |\vec{u} \times \vec{v}|$$



ÁREA TRIÁNGULO

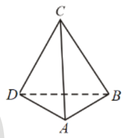
$$A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{u} \times \vec{v}|$$

VOL. PRISMA PARALELEPÍPEDO



$$V = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right|$$

VOLUMEN TETRAEDRO



$$V = \frac{1}{6} \cdot \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right|$$

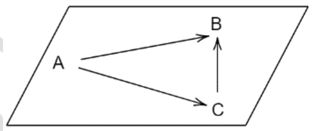
PUNTOS COPLANARIOS

Son aquellos que están en el mismo plano.

El producto mixto de los tres vectores debe dar 0.

Da igual qué vectores hagamos.

Si hay una incógnita en un punto, lo cogeremos sólo una vez



PUNTOS ALINEADOS

Son aquellos que están en la misma recta. Es decir, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tienen la misma dirección. Esto ocurre cuando sus coordenadas son proporcionales.

RECTAS Y PLANOS

RECTA $r: \overrightarrow{OX} = \vec{p} + \lambda\vec{d} \rightarrow \quad r: (x, y, z) = (x_o, y_o, z_o) + \lambda(d_x, d_y, d_z)$

Ecuaciones paramétricas $r: \begin{cases} x = x_o + \lambda d_x \\ y = y_o + \lambda d_y \\ z = z_o + \lambda d_z \end{cases}$

(x, y, z) punto genérico
(x_o, y_o, z_o) punto concreto. Vector posición
(d_x, d_y, d_z) vector director (paralelo)

Ecuación continua $\frac{x - x_o}{d_x} = \frac{y - y_o}{d_y} = \frac{z - z_o}{d_z}$

Ecuación vectorial $r: (x, y, z) = (x_o, y_o, z_o) + \lambda(d_x, d_y, d_z)$

Ecuación general o implícita $r: \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$ ← Recta como intersección de 2 planos

PLANO $\pi: \overrightarrow{OX} = \vec{p} + \lambda\vec{d} + \mu\vec{v} \quad \rightarrow \quad \pi: (x, y, z) = (x_o, y_o, z_o) + \lambda(d_x, d_y, d_z) + \mu(v_x, v_y, v_z)$

Ecuaciones paramétricas $\pi: \begin{cases} x = x_o + \lambda d_x + \mu v_x \\ y = y_o + \lambda d_y + \mu v_y \\ z = z_o + \lambda d_z + \mu v_z \end{cases}$

Ecuación general o implícita $Ax + By + Cz + D = 0$

(x, y, z) punto genérico
(x_o, y_o, z_o) punto concreto. Vector posición
(d_x, d_y, d_z) vector director (paralelo)
(v_x, v_y, v_z) vector director (paralelo)
(A, B, C) vector normal

PASAR RECTA DE FORMA IMPLÍCITA A PARAMÉTRICA

Tenemos la recta $r: \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$, aplicaremos Gauss

$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + y \quad = 1 \end{cases} \rightarrow F2 = F2 - F1 \rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -y + z = 1 \end{cases}$ → Definimos $z = t$ y resolvemos:

$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -y + z = 1 \\ z = t \end{cases} \rightarrow z = t; y = -1 + t; x = 2 - t \rightarrow r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + t \\ z = 0 + t \end{cases}$

MUY IMPORTANTE!

Si vemos que van a salir fracciones, volvemos a hacer Gauss pero eliminando otra variable.

POSICIONES RELATIVAS DOS RECTAS

Rectas r y s vienen determinadas por un punto y vector director: $r: \overrightarrow{OX} = P + \lambda\vec{u}, s: \overrightarrow{OX} = Q + \lambda\vec{v}$

$$r: \begin{cases} x = x_1 + \lambda u_x \\ y = y_1 + \lambda u_y \\ z = z_1 + \lambda u_z \end{cases}, \quad s: \begin{cases} x = x_2 + \mu v_x \\ y = y_2 + \mu v_y \\ z = z_2 + \mu v_z \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} u_x & v_x & PQ_x \\ u_y & v_y & PQ_y \\ u_z & v_z & PQ_z \end{pmatrix}$$

- $rang(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \rightarrow rang(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}) = 1 \rightarrow$ Coincidentes
- $rang(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \rightarrow rang(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}) = 2 \rightarrow$ Paralelas plano
- $rang(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \rightarrow rang(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}) = 2 \rightarrow$ Se cortan plano y punto
- $rang(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \rightarrow rang(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}) = 3 \rightarrow$ Se cruzan nada en común

OTRA FORMA:
Si $\vec{u} \nparallel \vec{v} \rightarrow$ se cortan o cruzan
Si $\vec{d} \parallel \vec{n} \rightarrow$ paralelas o coincidentes (calcular pto. corte)

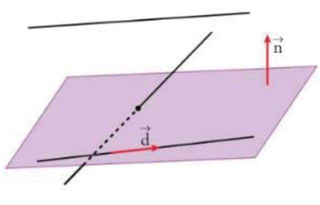
RECUERDA: puede aparecer λ o t

POSICIONES RELATIVAS PLANO Y RECTA

Con el plano $\pi: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y la recta $r: \begin{cases} A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}$

Con la matriz A de coeficientes y A^* la ampliada: $A = \begin{pmatrix} A_1B_1C_1 \\ A_2B_2C_2 \\ A_3B_3C_3 \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} A_1B_1C_1D_1 \\ A_2B_2C_2D_2 \\ A_3B_3C_3D_3 \end{pmatrix}$

- $rang(A) = 2 \rightarrow rang(A^*) = 2 \rightarrow SCI \rightarrow$ Recta contenida en el plano
- $rang(A) = 2 \rightarrow rang(A^*) = 3 \rightarrow \; SI \; \rightarrow$ Paralelos
- $rang(A) = 3 \rightarrow rang(A^*) = 3 \rightarrow SCD \rightarrow$ Se cortan



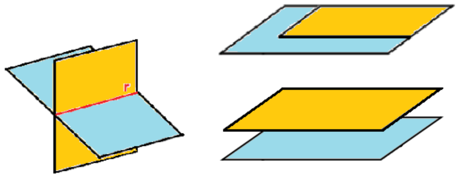
OTRA FORMA: Si $\vec{d} = \vec{n} \rightarrow$ recta y plano 90º. Perpendiculares
Si $\vec{d} \perp \vec{n} \rightarrow$ recta contenida o paralela. Si no → corta al plano

POSICIONES RELATIVAS DOS PLANOS

Con el sistema formado por las ecuaciones de los dos planos $\begin{cases} \pi: Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi': A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$.

Con la matriz A de coeficientes y A^* la ampliada: $A = \begin{pmatrix} A\ B\ C \\ A'B'C' \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} A\ B\ C\ D \\ A'B'C'D' \end{pmatrix}$

- $rang(A) = 1 = rang(A^*) = 1 \rightarrow SCI \rightarrow$ Coincidentes
- $rang(A) = 1 \neq rang(A^*) = 2 \rightarrow SI \rightarrow$ Paralelos
- $rang(A) = 2 = rang(A^*) = 2 \rightarrow SCD \rightarrow$ Se cortan

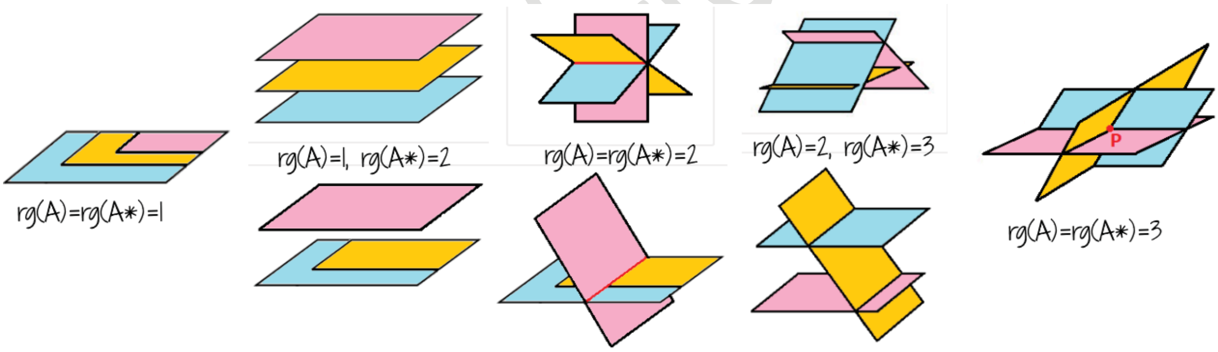


POSICIONES RELATIVAS TRES PLANOS (no paralelos)

Con el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos $\begin{cases} \pi: Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi': A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ \pi'': A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases}$

Con la matriz A de coeficientes y A^* la ampliada: $A = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \\ A'' & B'' & C'' & -D'' \end{pmatrix}$

- $rang(A) = 1 = rang(A^*) = 1 \rightarrow SCI \rightarrow$ Coincidentes
- $rang(A) = 1 \neq rang(A^*) = 2 \rightarrow SI \rightarrow$ No solución
- $rang(A) = 2 = rang(A^*) = 2 \rightarrow SCI \rightarrow$ Se cortan (forman una recta)
- $rang(A) = 2 \neq rang(A^*) = 3 \rightarrow SI \rightarrow$ No solución
- $rang(A) = 3 = rang(A^*) = 3 \rightarrow SCD \rightarrow$ Una única solución: un punto

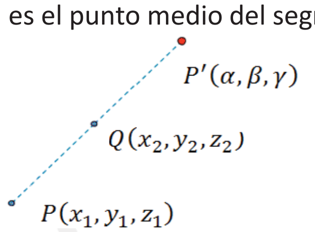


PUNTO SIMÉTRICO RESPECTO DE OTRO

El simétrico de $P(x_1, y_1, z_1)$ respecto de $Q(x_2, y_2, z_2)$ es $P'(\alpha, \beta, \gamma)$ si Q es el punto medio del segmento PP'

$$\frac{x_1 + \alpha}{2} = x_2; \quad \frac{y_1 + \beta}{2} = y_2; \quad \frac{z_1 + \gamma}{2} = z_2$$

Visto de otra forma: $Q = \frac{P+P'}{2} \rightarrow P' = 2Q - P$



TRES PUNTOS ALINEADOS

Los puntos $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$ están alineados si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ tienen misma dirección

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2}$$

ECUACIONES DE LAS RECTAS DE LOS EJES Y LOS PLANOS DE LOS EJES

Recta eje X $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ Recta eje Y $\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$ Recta eje Z $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$

Plano $XY \rightarrow 0x + 0y + z = 0;\ (x, y, z) = (0,0,0) + \lambda(1,0,0) + \mu(0,1,0);\ \vec{n} = (0,0,1), P(0,0,0)$
Plano $XZ \rightarrow 0x + y + 0z = 0;\ (x, y, z) = (0,0,0) + \lambda(1,0,0) + \mu(0,0,1);\ \vec{n} = (0,1,0), P(0,0,0)$
Plano $YZ \rightarrow x + 0y + 0z = 0;\ (x, y, z) = (0,0,0) + \lambda(0,1,0) + \mu(0,0,1);\ \vec{n} = (1,0,0), P(0,0,0)$

PROBLEMAS MÉTRICOS

ÁNGULOS ENTRE RECTAS Y PLANOS

Ángulo entre dos rectas

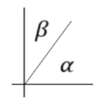
$$\cos\alpha = \frac{|\vec{d_r}\cdot\vec{d_s}|}{|\vec{d_r}||\vec{d_s}|}$$

Ángulo entre dos planos

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}$$

Ángulo entre recta y plano

$$\cos(\underbrace{90^{\circ}-\alpha}_{\beta}) = sen\alpha = \frac{|\vec{d_r}\cdot\vec{n_s}|}{|\vec{d_r}||\vec{n_s}|}$$



$\vec{d} \rightarrow$ vector director de la recta, y $\vec{n} \rightarrow$ vector normal del plano

DISTANCIAS EN EL ESPACIO

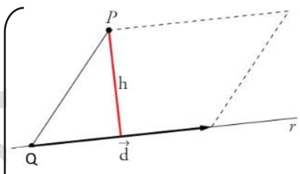
Distancias con respecto a punto P

- Distancia entre dos puntos P y Q

$$d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

- Distancia entre punto P y recta r

$$d(P,r) = d(P,P') = \frac{\text{Área Paralelogramo}}{Base} = \frac{|\overrightarrow{PQ_r}\times\vec{d_r}|}{|\vec{d_r}|} \longrightarrow$$



$Q \rightarrow$ punto de la recta
$\vec{d} \rightarrow$ vector director de la recta,
$\overrightarrow{PQr} \rightarrow$ vector de P a Qr

- Distancia entre punto $P(P_x, P_y, P_z)$ y plano $\pi: Ax+By+Cz+D=0$

$$d(P,\pi) = \frac{|AP_x+BP_y+CP_z+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Distancias entre dos planos π_1 y π_2

- Planos coincidentes o secantes: $d(\pi_1,\pi_2) = 0$
- Planos paralelos: $d(\pi_1,\pi_2) = d(P\pi_1,\pi_2)\ \alpha\ \beta$

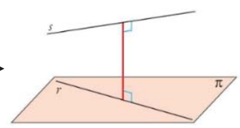
$P_\pi \rightarrow$ punto del plano π
$Pr \rightarrow$ punto de la recta r
$Ps \rightarrow$ punto de la recta s

Distancias entre recta r y plano π

- Plano y recta secantes o contenida: $d(r,\pi) = 0$
- Planos paralelos: $d(r,\pi) = d(P_r,\pi)$

Distancias entre recta r y recta s

- Rectas coincidentes o secantes: $d(r,s) = 0$
- Rectas paralelas: $d(r,s) = d(P_s,r) = \frac{|\overrightarrow{P_sQ_r}\times\vec{d_r}|}{|\vec{d_r}|}$
- Rectas se cruzan: $d(r,s) = \frac{|[\vec{d_r},\ \vec{d_s},\ \overrightarrow{P_rP_s}]|}{|\vec{d_r}\times\vec{d_s}|} \longrightarrow$



SIMETRÍA

Punto simétrico respecto de otro

Si M es el punto medio del segmento PP' entonces: $M = \frac{P+P'}{2} \rightarrow P' = 2M - P$

Punto simétrico de un punto P respecto a un plano π

1. Calculamos la recta r perpendicular al plano π que pase por P
2. Calculamos el punto de corte M entre la recta r y el plano π
   FIJATE: M es la proyección ortogonal del punto P sobre el plano
3. M es punto medio de $PP' \rightarrow$ Aplicamos punto simétrico respecto de otro: $P' = 2M - P$

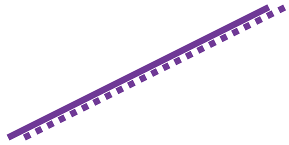
Punto simétrico de un punto P respecto a una recta r

1. Calculamos el plano π perpendicular a la recta r que pase por P — Sólo cambia el paso 1
2. Calculamos el punto de corte M entre la recta r y el plano π
3. M es punto medio de $PP' \rightarrow$ Aplicamos punto simétrico respecto de otro: $P' = 2M - P$

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO: POSICIONES RELATIVAS

DOS RECTAS

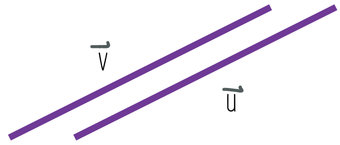
Dadas las ecuaciones implícitas, hallamos los puntos de intersección entre ambas rectas, resolviendo el sistema de ecuaciones.



COINCIDENTES

S.C.I.

infinitos puntos en común

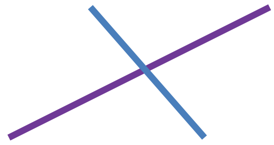


PARALELAS

S.I.

ningún punto en común

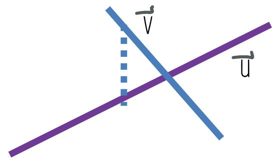
$\vec{v} \parallel \vec{u}$



SECANTES

S.C.D.

1 punto en común



SE CRUZAN

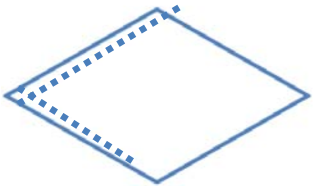
S.I.

ningún punto en común

$\vec{v} \nparallel \vec{u}$

DOS PLANOS

Dadas las ecuaciones generales, hallamos los puntos de intersección entre ambos planos, resolviendo el sistema de ecuaciones.

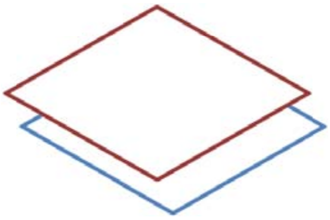


COINCIDENTES

S.C.I.

infinitos puntos en común

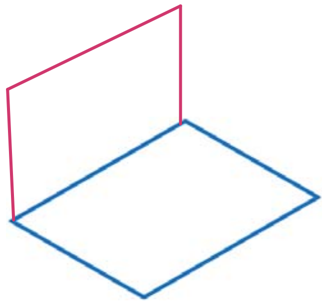
G Libertad = 2 (2 parámetros)



PARALELOS

S.I.

ningún punto en común



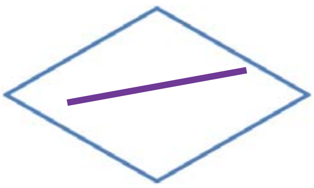
SECANTES

S.C.I.

infinitos puntos en común

G Libertad = 1 (1 parámetro)

UNA RECTA Y UN PLANO

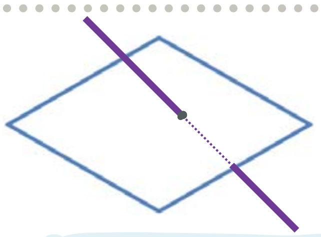


RECTA PERTENECIENTE AL PLANO

SCI

infinitos puntos en común

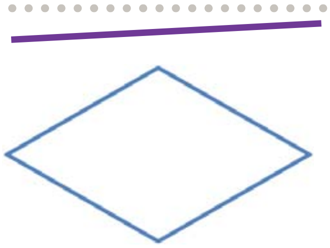
G Libertad = 1 (1 parámetro)



SECANTES 1 PUNTO

SCD

1 punto en común

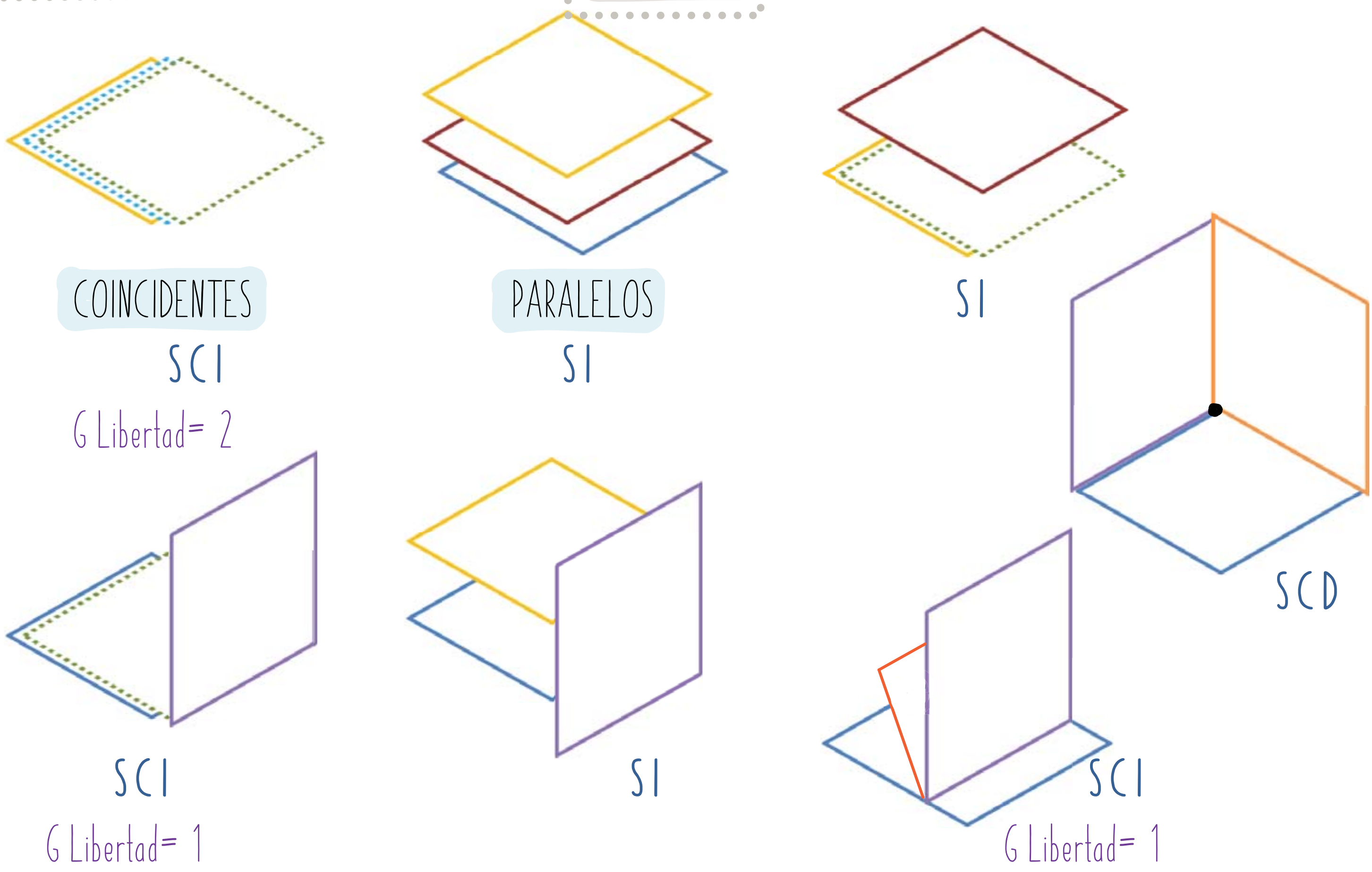


PARALELOS

SI

ningún punto en común

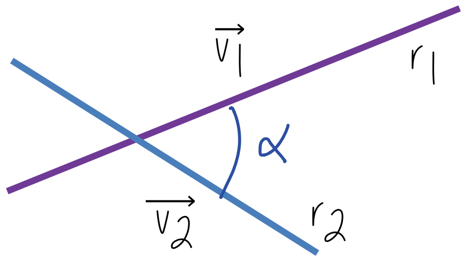
TRES PLANOS

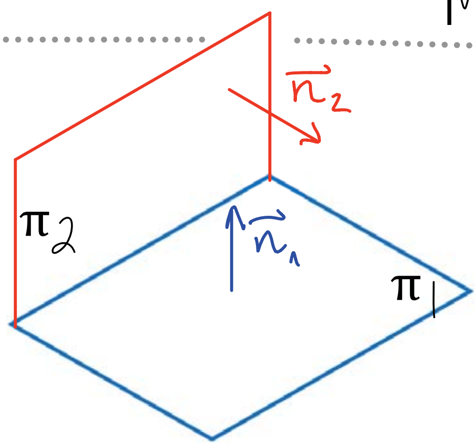


GEOMETRÍA EN EL ESPACIO: ÁNGULOS

Ángulo entre dos rectas

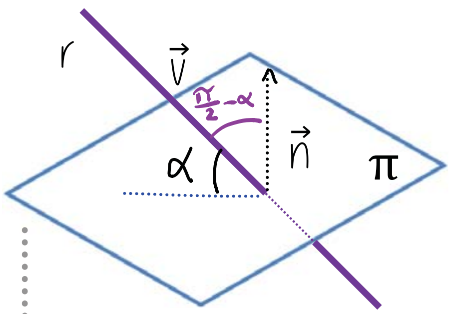
$$\cos(\alpha) = \cos(r_1, r_2) = |\cos(\vec{v_1}, \vec{v_2})| = \frac{|\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}|}{|\vec{v_1}| \cdot |\vec{v_2}|}$$





Ángulo entre dos planos

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = |\cos(\vec{n_1}, \vec{n_2})| = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}$$



Ángulo entre recta y plano

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{sen}(r, \pi) = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right| = |\cos(\vec{v}, \vec{n})| = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}$$

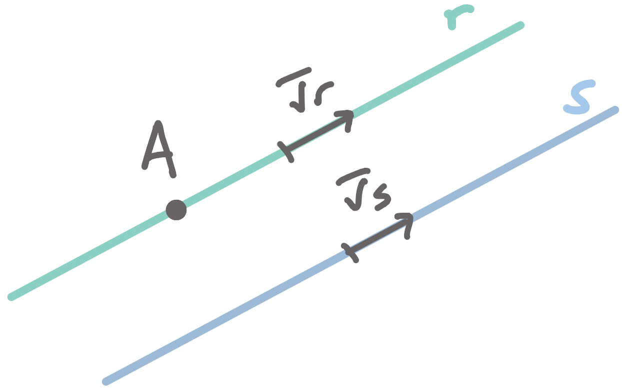
POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

RECTAS PARALELAS

$\vec{v_r} = k \cdot \vec{v_s}$

Si $A \in r$, $A \notin s$

Si resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas, obtenemos un SISTEMA INCOMPATIBLE.

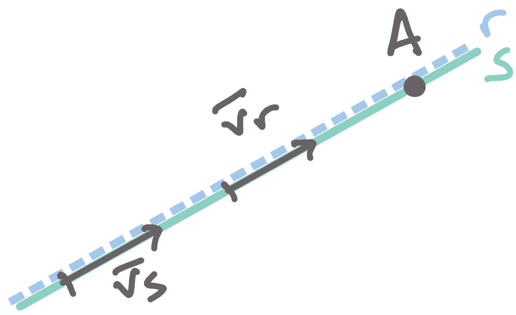


RECTAS COINCIDENTES

$\vec{v_r} = k \cdot \vec{v_s}$

Si $A \in r$, $A \in s$

Si resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas, obtenemos un SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (1 GRADO DE LIBERTAD, 1 PARÁMETRO)

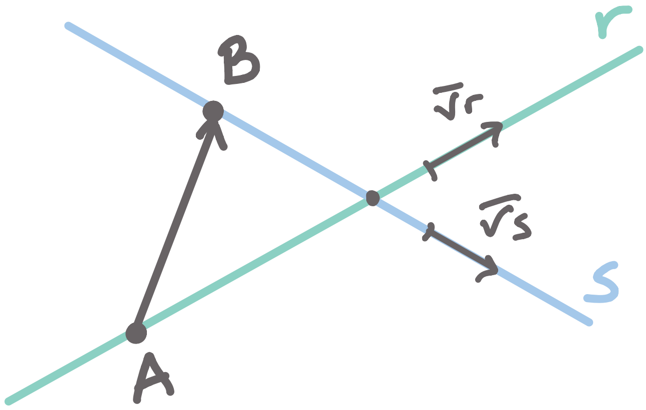


RECTAS SECANTES

$\vec{v_r} \neq k \, \vec{v_s}$

Los vectores $\vec{v_r}$, $\vec{v_s}$ y el formado por $\vec{AB}$, siendo A un punto cualquiera de la recta r y B un punto cualquiera de la recta s, son vectores linealmente dependientes (son coplanarios, pertenecen a un mismo plano) y por lo tanto $\det(\vec{v_r}, \vec{v_s}, \vec{AB}) = 0$

Si resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas, obtenemos un SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (La solución será el punto común a ambas rectas)

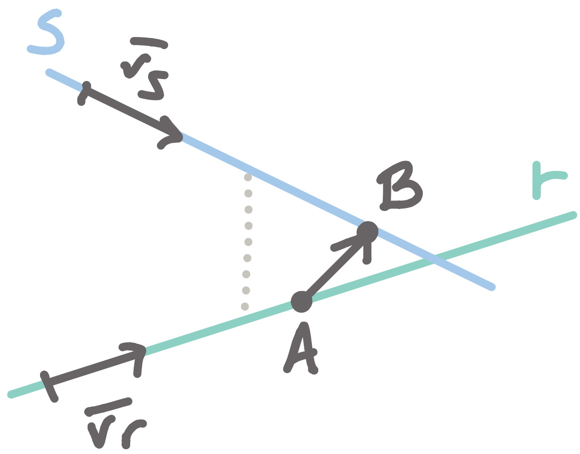


RECTAS QUE SE CRUZAN

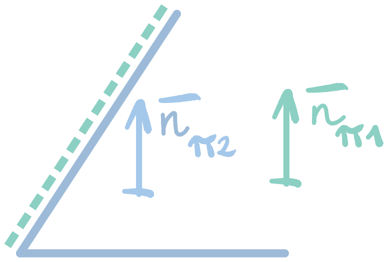
$\vec{v_r} \neq k \, \vec{v_s}$

Los vectores $\vec{v_r}$, $\vec{v_s}$ y el formado por $\vec{AB}$, siendo A un punto cualquiera de la recta r y B un punto cualquiera de la recta s, son vectores linealmente independientes (no pertenecen a un mismo plano) y por lo tanto, $\det(\vec{v_r}, \vec{v_s}, \vec{AB}) \neq 0$

Si resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas, obtenemos un SISTEMA INCOMPATIBLE.



POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS

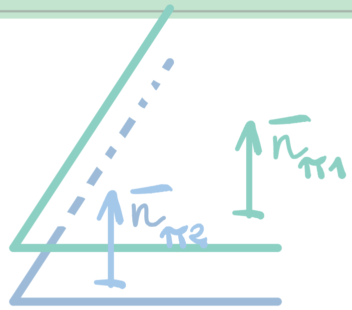


COINCIDENTES

$\overrightarrow{n_{\pi 1}}$ proporcional a $\overrightarrow{n_{\pi 2}}$

Si $A \in \pi 1$, $A \in \pi 2$

$\vec{n}_{\pi_1} = k \cdot \vec{n}_{\pi_2}$

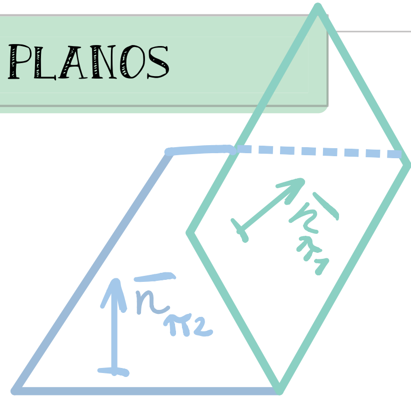


PARALELOS

$\overrightarrow{n_{\pi 1}}$ proporcional a $\overrightarrow{n_{\pi 2}}$

Si $A \in \pi 1$, $A \notin \pi 2$

$\vec{n}_{\pi_1} = k \cdot \vec{n}_{\pi_2}$



SECANTES

$\overrightarrow{n_{\pi 1}}$ no proporcional a $\overrightarrow{n_{\pi 2}}$

$\vec{n}_{\pi_1} \neq k \cdot \vec{n}_{\pi_2}$

DISCUSIÓN DEL SISTEMA FORMADO POR LAS ECUACIONES DE LOS DOS PLANOS

S.C.I.

Infinitos puntos en común

G.Libertad = 2 (2 parámetros)

S.I.

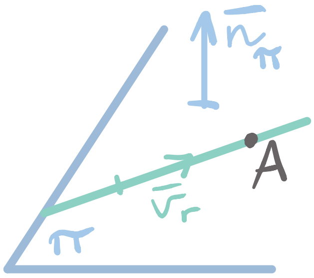
Ningún punto en común

S.C.I.

Infinitos puntos en común

G.Libertad = 1 (1 parámetro)

POSICIÓN RELATIVA ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO

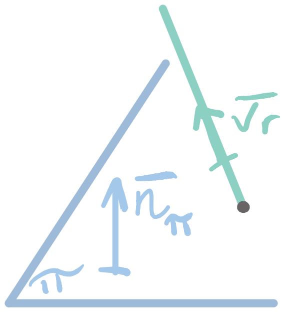


RECTA PERTENECIENTE AL PLANO

$\overrightarrow{n_{\pi}}$ perpendicular a $\overrightarrow{v_r}$

Si $A \in r$, $A \in \pi$,

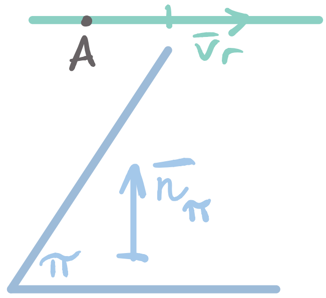
$\vec{n}_{\pi} \cdot \vec{v}_r = 0$



RECTA Y PLANO SECANTES

$\overrightarrow{n_{\pi}}$ no perpendicular a $\overrightarrow{v_r}$

$\vec{n}_{\pi} \cdot \vec{v}_r \neq 0$



RECTA Y PLANO PARALELOS

$\overrightarrow{n_{\pi}}$ perpendicular a $\overrightarrow{v_r}$

SI $A \in r$, $A \notin \pi$,

$\vec{n}_{\pi} \cdot \vec{v}_r = 0$

DISCUSIÓN DEL SISTEMA FORMADO POR LAS ECUACIONES DE LA RECTA Y EL PLANO

S.C.I.

Infinitos puntos en común

G.Libertad = 1 (1 parámetro)

S.C.D.

1 punto en común

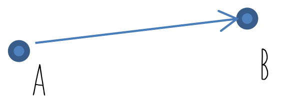
S.I.

Ningún punto en común

PROBLEMAS GEOMÉTRICOS: DISTANCIAS

1 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS A Y B

$\text{dist}(A,B) = |\overrightarrow{AB}|$



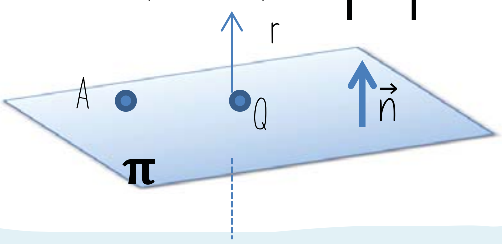
2 DISTANCIA ENTRE UN PUNTO A Y UNA RECTA r

Procedimiento :

1 Hallar plano π perpendicular a r y que contiene a A (Vector normal del plano = vector de la recta)

2 Hallar punto de intersección de la recta r y el plano π (resolver el sistema formado por las tres ecuaciones): obtener el punto Q.

3 Halla distancia entre punto A y Q = $|\overrightarrow{AQ}|$



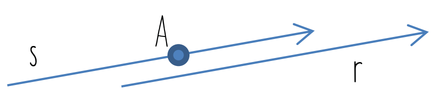
LA DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS QUE SE CORTAN ES 0

3 DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS r Y s PARALELAS

Procedimiento :

1 Seleccionar un punto de la recta s: A

2 Hallar distancia entre punto A y la recta r (Mirar 2)

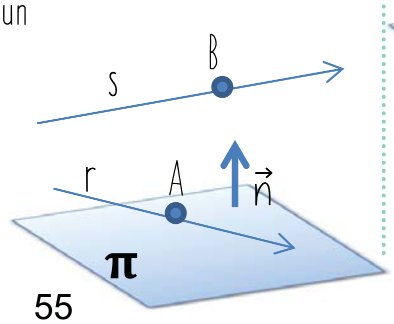


4 DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS r Y s QUE SE CRUZAN

Procedimiento :

1 Hallar un plano π que contenga a r $\left(\vec{n} = \vec{v_r} \times \vec{v_s}\right)$ y un punto de r: A.

2 Hallar distancia entre un punto B de s y plano π (Mirar 5)



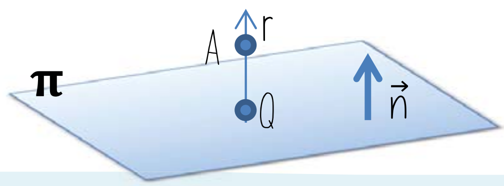
5 DISTANCIA ENTRE UN PUNTO A Y UN PLANO π

Procedimiento :

1 Hallar recta r perpendicular a π y que pasa por A $(\vec{n} = \vec{v_r})$

2 Hallar punto de intersección de la recta r y el plano π : pto Q.

3 Halla distancia entre punto A y Q = $|\overrightarrow{AQ}|$



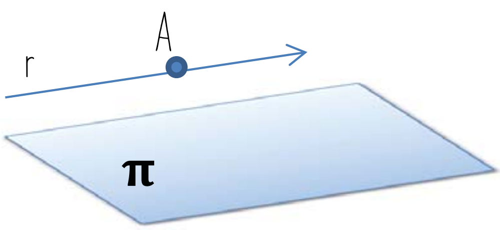
LA DISTANCIA ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO QUE SE CORTAN ES 0

6 DISTANCIA ENTRE UNA RECTA r Y UN PLANO π PARALELOS

Procedimiento :

1 Seleccionar un punto de la recta r: A.

2 Hallar distancia entre el punto A y el plano π. (Mirar 5)

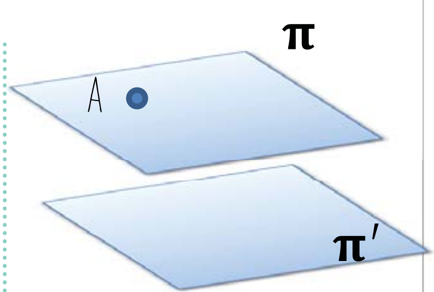


7 DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS PARALELOS

Procedimiento :

1 Seleccionar un punto del plano π : A.

2 Hallar distancia entre el punto A y el plano π'. (Mirar 5)



GEOMETRÍA

2012

JUNIO. Opción A

Dados los puntos $A(3,0,2), B(1,-2,0), C(1,-1,3)$ y $D(\lambda,\lambda-2,-\lambda)$

a) Determina el valor de λ para que A,B,C y D sean coplanarios. ¿Para algún valor de λ son A,B,C y D vértices de un paralelogramo?

b) Calcula las ecuaciones paramétricas del plano π que pasa por el punto C y es perpendicular a la recta r que pasa por los puntos A y B

SOL A: λ=-1 (1p); No paralelos. No paralelogramo (1p);
SOL B: x=1-λ, y=-1+μ, z=3+λ-μ (1p)

JUNIO Opción B

a) Si $|\vec{v}|=6, |\vec{w}|=10$, y $|\vec{v}+\vec{w}|=14$, calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$

b) Calcula las ecuaciones paramétricas y la ecuación general del plano que pasa por los puntos $A(-1,5,0)$, $B(0,1,1)$ y es paralela a la recta:

$$r:\begin{cases}3x+2y \qquad -3=0\\ \qquad 2y-3z-1=0\end{cases}$$

SOL A: α=π/3 (1p); SOL B: 11x+4y+5z-9=0 (1p), x=-1-2λ+μ, y=5+3λ-4μ, z=2λ+μ 1p)

SEPTIEMBRE Opción A

Dados el plano $\pi: x-2y+3z+6=0$

a) Calcula el área del triángulo de vértices los puntos de corte de π con los ejes de coordenadas.

b) Calcula la ecuación general del plano que es perpendicular al plano π, paralelo a la recta que pasa por los puntos $B(0,3,0)$ y $C(0,0,2)$ y pasa por el origen de coordenadas.

c) Calcula el punto simétrico del origen de coordenadas respecto al plano $\pi: x-2y+3z+6=0$

SOL A: $3\sqrt{14}u^2$ (1p); SOL B: 13x+2y-3z=0 (1p); SOL C: O'(-6/7, 12/7, -18/7) (1p);

SEPTIEMBRE Opción B

a) Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1: x+y+z-5=0, \pi_2:\begin{cases}x=3+\lambda+2\mu\\ y=1-\lambda-\mu\\ z=1 \qquad +\mu\end{cases}$

Si se cortan en una recta, escribe las ecuaciones paramétricas de la misma.

b) Calcula la ecuación del plano π_3 que pasa por el origen de coordenadas, y es perpendicular a π_1 y π_2. Calcula la intersección de π_1, π_2 y π_3.

SOL A: se cortan. r: x=4-λ, y=λ, z=1 (2p); SOL B: π3=x-y=0, P(2,2,1) (1p

2013

JUNIO. Opción A

Dados el plano $\pi: x+y-z-1=0$ y la recta $r:\begin{cases}3x+y+z-6=0\\ 2x+y \qquad -2=0\end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de r y π. Calcula la distancia de r a π.

b) Calcula la ecuación general o implícita del plano que contiene a r y es perpendicular a π.

SOL A: Paralelos (1p), $\sqrt{3}u$ (1p); SOL B: x+y-4=0 (1p);

JUNIO Opción B

a) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano π determinado por los puntos $A(1,0,2), B(2,1,3)$ y $C(3,0,0)$.

b) Calcula los posibles valores de a para que el punto $P(a,a,a)$ equidiste de la recta r y del plano π del apartado anterior.

SOL A: r: x=λ, y=-2λ, z=λ (1p); SOL B: $\sqrt{6}/2u$ (0,5p), d=|a|$\sqrt{3}$ (1p), a=+-$\sqrt{2}/2$ (0,5p)

SEPTIEMBRE Opción A

Dadas las rectas $r:\begin{cases}x-2y+z+1=0\\ \qquad 2y-z-2=0\end{cases}$ y $s:\begin{cases}x=2+t\\ y=3+2t\\ z=2+2t\end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de r y s. Si se cortan, calcula el punto de corte. Si determinan un plano, calcula la ecuación general o implícita de ese plano.

b) Estudia la posición relativa de r y el plano $\pi: 4x-4y+2z+7=0$. Calcula la distancia de r a π

SOL A: se cortan (0,5p), P(1,1,0) (0,5p), α: 2x-2y+z=0 (0,5p);
SOL B: paralelos (0,5p), d=7/6 (1p)

SEPTIEMBRE Opción B

a) Dado el plano $\alpha:\begin{cases}x=3+3\lambda+\mu\\ y=\quad -3\lambda+\mu\\ z=3+3\lambda-\mu\end{cases}$ Calcula las ecuaciones en forma continua de la recta r que pasa por el punto $P(2,-3,-4)$ y es perpendicular al plano α.

b) Calcula la ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos $P(2,-3,-3)$ y $Q(3,-2,-4)$ y es perpendicular al plano α

c) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta intersección del plano $\beta: 5x - 4y + z - 19 = 0$ con el plano α.

SOL A: r: x-2/1 = y+3/2 = z+4/3 (0,5p), P(4,1,2) (0,5p);
SOL B: 5x-4y+z-19=0 (1p); SOL C: s: x=43/7-λ, y=41/14-λ, z=λ (1p)

2014

JUNIO. Opción A

a) Calcula el punto simétrico del punto $P(-2,0,2)$ respecto al plano $\pi: 3x + 2y + z - 3 = 0$.

b) Sea r la recta perpendicular al plano $\pi: 3x + 2y + z - 3 = 0$ y que pasa por el punto $P(-2,0,2)$. Consideremos la recta $s: \begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ x - z - 10 = 0 \end{cases}$ estudia la posición relativa de r y s. Calcula la ecuación del plano paralelo a s que contiene a r.

SOL A: x=-2+3λ, y=2λ, z=2+λ (0,25p), M(-1/2, 1, 5/2) (025p), P'(1,2,3) (0,25);
SOL B: se cruzan (1p), α:3x-2y-5z+16=0 (1p)

JUNIO Opción B

a) Define el producto vectorial de dos vectores. Dados los vectores $u = (2,2,0), v = (1,1,-1)$, calcula los vectores unitarios y perpendiculares a los dos vectores u e v.

b) Calcula el valor de a para que la recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-2}{-4}$ no corte al plano $\pi: 5x + ay + 4z = 5$. Para ese valor de a, calcula la distancia de la recta al plano.

SOL A: definir (0,75p), w1(-$\sqrt{2}/2$, $\sqrt{2}/2$,0), w2($\sqrt{2}/2$,-$\sqrt{2}/2$,0) (0,75p);
SOL B: a=1 (0,5p), $5\sqrt{42}/42$ u (1p)

SEPTIEMBRE Opción A

Dado el plano $\pi: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda - \mu \\ y = 1 - 2\lambda + \mu \\ z = 4 + 3\mu \end{cases}$ y la recta $r: \begin{cases} x + z - 4 = 0 \\ y = 3 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de π y r. Si se cortan, calcula el punto de corte.

b) Calcula el ángulo que forman π y r. Calcula el plano que contiene a r y es perpendicular a π.

SOL A: se cruzan (1p), P(0,3,4) (0,5p); SOL B: α=π/6 (0,5p), π: x=4-λ+μ, y=3+μ, z=λ (1p)

SEPTIEMBRE Opción B

Dadas las rectas $r: \begin{cases} x + y - 2z - 5 = 0 \\ y - 5z - 1 = 0 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 5 \end{cases}$

a) Estudia su posición relativa. Si se cortan, calcula el punto de corte.

b) Calcula la ecuación implícita o general de las ecuaciones paramétricas del plano que contiene a r y a s.

c) Calcula la distancia del punto $Q(1,1,4)$ a la recta s.

SOL A: se cortan (1p), P(-11,26,5) (0,5p); SOL B: 2x+y+z-9=0 (0,75p); SOL C: $\sqrt{30}/5$ (0,75p)

2015

JUNIO. Opción A

Dada la recta $r = \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$

a) Determinar la ecuación implícita del plano π que pasa por el punto $P(2,1,2)$ y es perpendicular a r. Calcula el punto de intersección de r y π

b) Calcula la distancia del punto $P(2,1,2)$ a la recta r

c) Calcula el punto simétrico del punto $P(2,1,2)$ respecto de la recta r

SOL A: π:2x+y-z-3=0 (0,5p), P(3,1,4) (0,5p); SOL B: $\sqrt{5}$ (1p); SOL C: P'(4,1,6) (1p)

JUNIO Opción B

Dadas las rectas $r = \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases}$ y $s: \frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-5}{4}$

a) Estudia su posición relativa. Calcula la ecuación implícita o general del plano que pasa por el origen de coordenadas y que es paralelo a r y s

b) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que corta perpendicularmente a r y a s

SOL A: se cruzan. π:2x+2y-z=0 (1,5p); SOL B: t: x=8+2λ, y=-1+2λ, z=14-λ (1,5p)

SEPTIEMBRE Opción A

Dadas la recta $r = \begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \end{cases}$

a) Calcula la ecuación implícita o general del plano que es paralelo a r y pasa por los puntos $A(0,1,2)$ y $B(5,3,1)$

b) Calcula el punto de corte de r con el plano perpendicular a dicha recta y que pasa por $B(5,3,1)$

c) Calcula la ecuación implícita o general del plano que es paralelo al plano $\pi: 2x - 3y + 4z - 5 = 0$ y dista $\sqrt{29}$ unidades de la recta r

SOL A: π:2x-3y+4z-5=0 (1p); SOL B: P(2,4,2) (1p); SOL C: β:2x-3y+4x+-29=0 (1p)

SEPTIEMBRE Opción B

Dadas las rectas $r = \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$

a) Estudia su posición relativa. Calcula la distancia de r a s

b) Si dos de los lados de un rectángulo están sobre las rectas r y s y dos vértices consecutivos del rectángulo son los puntos $A(0,1,1)$ y $B(0,4,4)$, calcula las coordenadas de los otros dos vértices y el área del rectángulo. *SOL A: paralelas (1p), $3\sqrt{2}$ (0,5p); SOL B: C(-4,5,3), D(-4,2,0) (1p), 18 u^2(0,5p)*

2016

JUNIO. Opción A

a) Calcula el valor de m para que los puntos $A(m,-1,m), B(1,-5,-1), C(3,1,0)$ y $D(2,-1,0)$ estén en un mismo plano. Calcula la ecuación implicitica o general de ese plano.

b) Calcula el ángulo que forma el plano $\pi.2x - y + 2z - 5 = 0$ y la recta r que pasa por los puntos $P(3,-4,-7)$ y $Q(1,-3,-9)$.

c) Calcula los puntos de la recta r del apartado anterior que distan 9 unidades del plano π.

SOL A: π:2x-y+2z-5=0 (0,5p); m=1 (0,5p);SOL B: 90º (1p); SOL C: A(11,-8,1), B(-1,-2,-11) (1p)

JUNIO Opción B

Dadas la recta $r = \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$

a) Calcula la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $P(2,5,-2)$ y es perpendicular a la recta r

b) Estudia la posición relativa de la recta r y la recta s que pasa por los puntos $P(2,5,-2)$ y $Q(-1,4,2)$

c) Calcula el punto a la recta r que equidista de los puntos $P(2,5,-2)$ y $Q(-1,4,2)$

SOL A: π:x+y+2z-3=0 (1p); SOL B: se cruzan (1p); SOL C: R(-1,1,-2) (1p)

SEPTIEMBRE Opción A

Dados los planos $\pi_1: 3x + 3z - 8 = 0;\ \pi_2 = \begin{cases} x = 5/2 + \lambda - \mu \\ y = \quad -\lambda + \mu \\ z = 3 + 2\lambda + \mu \end{cases}$

a) Calcula el ángulo que forman π_1 y π_2. Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $P(0,0,0)$ y es paralela a π_1 y π_2.

b) Calcula el punto simétrico del punto $P(0,0,0)$ respecto del plano π_1

SOL A: α=π/3 (0,75p), r: x=-λ, y=λ, z=λ (0,75p); SOL B: O'(8/3,0,8/3) (1,5p)

SEPTIEMBRE Opción B

Dadas las rectas $r: \frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{3};\ s = \begin{cases} 3x + 2y \quad - 6 = 0 \\ 2y + 4z + 3 = 0 \end{cases}$

a) Estudia su posición relativa

b) Calcula la ecuación implícita o general del plano que contiene a r y es paralelo a s

c) Calcula la distancia entre r y s

SOL A: se cruzan (1p); SOL B: π:3x-4z-5=0 (1p); SOL C: 4/5 (1p)

2017

JUNIO. Opción A

Dados los planos $\pi_1: x + y - z + 2 = 0;\ \pi_2 = \begin{cases} x = 2 + \lambda + \mu \\ y = \quad \lambda + 3\mu \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de π_1 y π_2. Si se cortan, calcula el ángulo que forman.

b) Sea r la recta que pasa por el punto $P(1,1,1)$ y es perpendicular a π_1. Calcula el punto de corte de r y π_1

c) Calcula el punto simétrico del punto $P(1,1,1)$ respecto del plano π_1

SOL A: perpendiculares (0,5p); α=π/2 (0,5p); SOL B: M(0,0,2) (1p); SOL C: P´(-1,-1,3) (1p)

JUNIO Opción B

Sea r la recta que pasa por los puntos $P(1,0,5)$ y $Q(5,2,3)$.

a) Calcula la distancia del punto $A(5,-1,6)$ a la recta r.

b) Calcula la ecuación implícita o general del plano que es perpendicular a r y pasa por el punto $A(5,-1,6)$

c) Calcula el área del triángulo de vértices los puntos $P(1,0,5), A(5,-1,6)$ y el punto de corte de la recta r con el plano $\pi: 2x + y - z - 3 = 0$

SOL A: $2\sqrt{3}u$ (1p); SOL B: π:2x+y-z-3=0 (1p); SOL C: $3\sqrt{2}u^2$(0,5p), M(3,1,4) (0,5p)

SEPTIEMBRE Opción A

Sea r la recta que pasa por los puntos $P(0,1,3)$ y $Q(1,1,1)$ e $s: \begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$

a) Estudia su posición relativa.

b) ¿Es s paralela al plano YZ? ¿Está contenida en dicho plano?

c) Calcula la distancia de la recta r al plano $\pi: 2x + z = 0$

SOL A: se cruzan (1p); SOL B: paralela a YZ (0,5p), no contenida en YZ (0,5p); SOL C: $(3\sqrt{5})/5$ (1p)

SEPTIEMBRE Opción B

Dados los planos $\alpha: 2x-2y+4z-7=0$; $\beta=\begin{cases} x=1-\lambda+3\mu \\ y=5+\lambda+\mu \\ z=4+\lambda-\mu \end{cases}$; y la recta $r: \begin{cases} x+2z-3=0 \\ y-5=0 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de los planos α y β. Calcula la distancia entre ellos.

b) Calcula la ecuación implícita o general del plano que es perpendicular a α y contiene a la recta r.

c) Sean P y Q los puntos de corte de la recta r con los planos XY y YZ respectivamente. Calcula la distancia entre P y Q.

SOL A: α y β paralelos (0,5p), $\sqrt{6}/12\ u$ (0,5p); SOL B: π: x+5y+2z-28=0 (1p); SOL C: $(3\sqrt{5})/2$ (1p)

2018

JUNIO. Opción A

a) Determina el valor de λ para que los puntos $A(3,0,-1), B(2,2,-1), C(1,-2,-5)$ y $D(\lambda,6,-1)$ sean coplanarios y calcula la ecuación implícita o general del plano que los contiene.

b) Determina la posición relativa del plano $\pi: 4x+2y-3z-15=0$ y la recta r que pasa por los puntos $P(-4,4,2)$ y $Q(4,8,-4)$. Si se cortan, calcula el punto de corte.

c) Calcula el punto simétrico del punto $P(-4,4,2)$ respecto del plano $\pi: 4x+2y-3z-15=0$

SOL A: λ=0 (0,5p), π:4x+2y-3z-15=0 (0,5p);
SOL B: se cortan, son perpendiculares (0,5p), P(0,6,-1) (0,5p); SOL C: P'(4,8,-4) (1p)

JUNIO. Opción B

a) Dado el plano $\pi: 2x-y-2z-3=0$ calcula el calor de α para que la recta r que pasa por los puntos $P(\alpha,\alpha,\alpha)$ y $Q(1,3,0)$ sea paralela al plano π.

b) Para $\alpha=1$, calcula la distancia de r a π.

c) Para $\alpha=1$, calcula la ecuación implícita o general del plano que es perpendicular a π y que contiene a r

SOL A: a=1 (1p); SOL B: 4/3u (1p); SOL C: a: 5x+2y+4z-11=0 (1p)

SEPTIEMBRE. Opción A

Dado la recta $r=\begin{cases} x+y+z-2=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases}$

a) Calcula la ecuación implícita o general del plano que pasa por el punto $A(1,1,1)$ y es perpendicular a r

b) Calcula la ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos $P(-1,0,6)$ y $Q(3,-2,4)$ y es paralelo a la recta r.

c) Calcula la distancia de la recta r al plano $x+y+z-5=0$

SOL A: π: x-z=0 (1p); SOL B: π: x+y+z-5=0 (1p); SOL C: $3/\sqrt{3}=\sqrt{3}u$ (1p)

SEPTIEMBRE. Opción B

Sea r la recta que pasa por los puntos $P(9,4,1)$ y $Q(1,1,1)$. Dada la recta $s: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{-1}$

a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s. Calcula, si se cortan, el punto de corte.

b) Calcula, si existe, la ecuación implícita o general del plano que contiene a las rectas r y s

c) Calcula la distancia del punto $O(0,0,0)$ a la recta s.

SOL A: se cortan (0,5p), P(9,4,1) (0,5p); SOL B: π: 3x-8y-2z+7=0 (1p); SOL C: $7\sqrt{2}/2$ u (1p)

2019

JUNIO. Opción A

a) Calcular el ángulo del intervalo $[0°,90°]$ que forman los vectores $\vec{u}(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ y $\vec{v}\left(-\frac{1}{2},\frac{-1+\sqrt{2}}{2},\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$.

b) Obtener la ecuación implícita del plano que pasa por el punto $P(1,-3,0)$ y es perpendicular a la recta $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ y-z=0 \end{cases}$.

c) Calcula la distancia del punto $Q(1,1,1)$ al plano $\pi: -x+y+z+4=0$ y el punto simétrico de Q respecto a π. *SOL A: α=π/3; SOL B: x-y-z+4=0; SOL C: $5\sqrt{3}/3$; Q'(13/3, -7/3, -7/3)*

JUNIO. Opción B

a) Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1: mx-y+2=0$ y $\pi_2: 2x+3y=0$ en función de m.

b) Obtén la ecuación implícita del plano que pasa por los puntos $A(0,0,0), B(1,0,1)$ y $C(0,1,0)$.

c) Calcula el punto simétrico del punto $P(1,2,3)$ con respecto al plano $\pi: -x+z=0$

SOL A: m=-2/3 //; m≠-2/3 se cortan (1p); SOL B: x-z=0 (1p); SOL C:P´(3,2,1) (1p)

JULIO. Opción A

a) Estudiar la posición relativa de $\pi_1: x+my+z+2=0$ y $\pi_2: mx+y+z+m=0$ en función de m.

b) Calcular el valor de k y m para que los puntos $A(0,k,1), B(-1,2,1)$ y $C(8,1,m)$ estén alineados.

c) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $P(-1,2,1)$ y $Q(8,1,1)$ y la ecuación implícita del plano perpendicular a r que pasa por el punto $R(1,1,1)$.

SOL A: m=1 paralelos; m≠1 secantes en una recta
SOL B: k=17/9; m=1: SOL C: : r: x=-1+9λ, y=2+λ, z=1; Plano: 9x+y-10=0;

JULIO. Opción B

a) Para el plano $\pi: 3x + 2y - z = 0$ y la recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3}$, calcular el punto de corte de r con π y obtener la ecuación implícita del plano π' que es perpendicular a π y contiene a r.

b) Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1: 2x - 5y - 4z - 9 = 0$ y $\pi_2: x = 0$ y calcula también el ángulo $\alpha \in [0,90]$ que forman.

SOL A: P(3,-3,3); 2x-5y-4z-9=0; SOL B: se cortan en una recta. α=72,65º

2020 **ORDINARIA JULIO 5**

a) Obtén la ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos $A(3,0,-1), B(4,1,1), C(7,1,5)$

b) Obtén las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular al plano $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$ y que pasa por los puntos $P(-1,-2,2)$

SOL A: π:4x+2y-3z-15=0; SOL B: x=-1+4λ; y=-2+2λ; z=2-3λ

ORDINARIA JULIO 6

Estudie la posición relativa de las rectas $r: \frac{x-3}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ y $s: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+2}{3}$. Si se cortan, calcula el punto de corte.

SOL: se cortan P(1,1,1)

EXTRAORDINARIA SEPTIEMBRE 5

Sea r la recta de vector director $\overrightarrow{d_r}(1,0,3)$ que pasa por $P(1,0,3)$ y $\pi: -2x + y + z = 0$. Se pide la posición relativa de r y π. En caso de que se corten, hallar el punto de corte.

SOL: se cortan en Q(3,0,6)

EXTRAORDINARIA SEPTIEMBRE 6

a) Calcula k sabiendo que los vectores $\vec{u}(2,0,0), \vec{v}(0,k,1)$ y $\vec{w}(2,2,2)$ son coplanarios.

b) Obtener la ecuación implícita del plano π que pasa por $P(1,0,0)$ y contiene a $r: x - 1 = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{3}$

SOL A: k=1 (1p); SOL B: π:4x+y-4=0

2021 **ORDINARIA JUNIO 5**

a) Obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por los puntos $A(1,0,0), B(0,2,0)$ y $C(0,0,3)$

b) Calcule el punto simétrico de $P(10,-5,5)$ con respecto al plano $\pi: 6x + 3y + 2z - 6 = 0$

SOL A: $\pi: 6x + 3y + 2z - 6 = 0$*; SOL B: P'(-2,-11,1)*

ORDINARIA JUNIO 6

a) Halle el valor de a si el plano $\pi: ax + y + z = 0$ es paralelo a la recta $r = \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

b) Estudie la posición relativa de los planos $\pi_1: 2x + y + mz + m = 0$ y $\pi_2: (m-1)x + y + 3z = 0$ en función del parámetro m.

SOL A: a=-2; SOL B: m=3 → paralelos; m≠3 → secantes

EXTRAORDINARIA SEPTIEMBRE 5

a) Obtenga la ecuación implícita del plano $\pi = \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + \mu \\ z = 1 + \lambda + 2\mu \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

b) Calcula el valor de m para que los siguientes puntos sean coplanarios: $A(0,m,0), B(0,2,2), C(1,4,3)$ y $D(2,0,1)$, Obtenga la ecuación implícita del plano π que los contiene.

SOL:

EXTRAORDINARIA SEPTIEMBRE 6

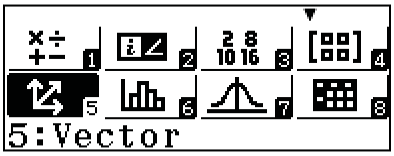
Calcule el punto simétrico de $P(1,1,2)$ con respecto al plano $\pi: 2x - y + z + 3 = 0$. Se

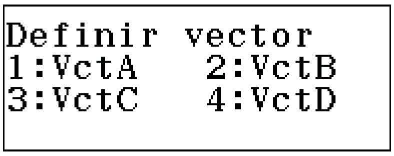
SOL:

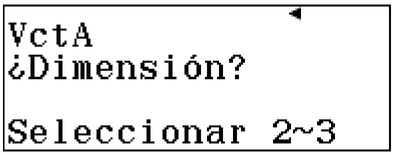
CASIO CLASSWIZ fx-570/991 - GEOMETRÍA

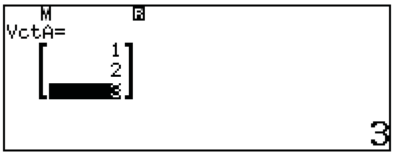
PRODUCTO ESCALAR

$\vec{u}(1,2,3)\cdot\vec{v}(4,5,6) =$ Entramos en el menú matriz MENU 5 y definimos los vectores de dimensión 3

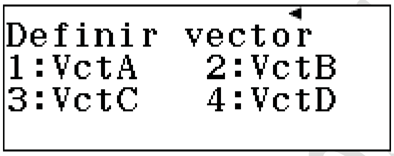


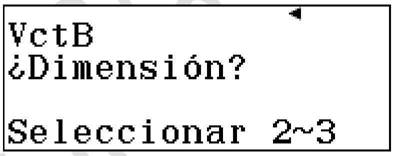


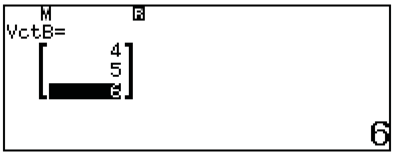




Vamos dando al = para aceptar cada valor. Con OPTN definimos el vector B (podemos definir hasta 4)

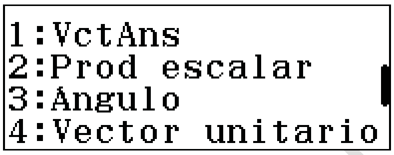


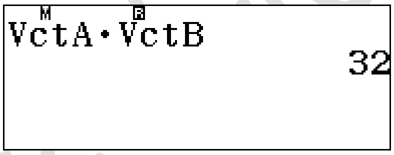




Con OPTN de nuevo podemos elegir los vectores.

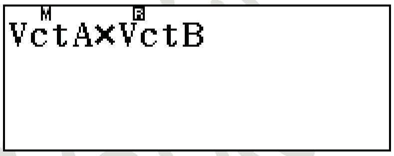
Con OPTN ▼ seleccionamos producto escalar.

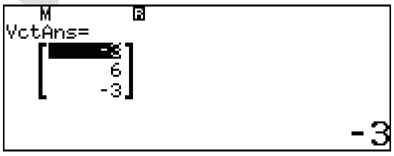




PRODUCTO VECTORIAL

$\vec{u}\times\vec{v} = (-3,6,-3)$ Operamos normalmente, con el operador ×.

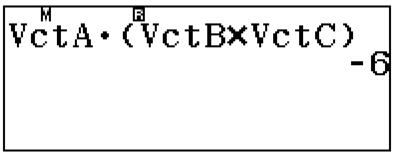




PRODUCTO MIXTO

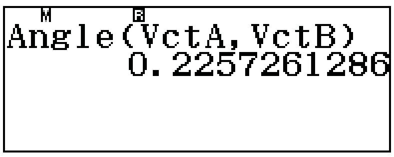
$\vec{w}(1,0,1)$. Operamos $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] =$ Definimos $\vec{w}$ y operamos con producto escalar y vectorial

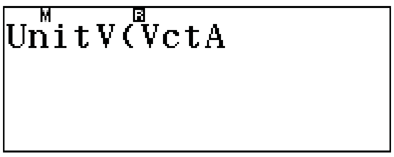
$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) =$

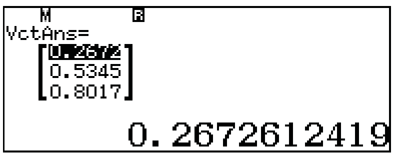


VECTOR UNITARIO Y ÁNGULO DE DOS VECTORES

Con OPTN ▼ tenemos esas dos opciones. La coma: SHIFT)



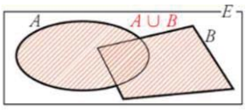




AZAR Y PROBABILIDAD

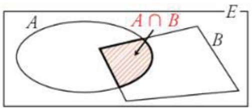
OPERACIONES CON SUCESOS

$A \cup B$ → **Unión de sucesos** formado por todos los casos de A y de B

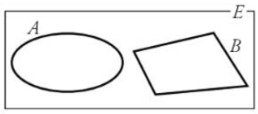


$\bar{A}$ → **Suceso contrario o complementario:** se da cuando no se da el suceso A

$A \cap B$ → **Intersección de sucesos**: todos los casos que son, a la vez, de A y de B

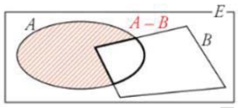


Sucesos incompatibles: ningún caso en común $P(A \cap B) = 0$



Diferencia se sucesos:
formado por todos los casos de A que no son de B

- $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$



RELACIÓN ENTRE SUCESOS

Sucesos independientes

- $P(A/B) = P(A)$
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Sucesos incompatibles

- $P(A \cap B) = 0$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Al sumar P(A)+P(B), la parte común se suma 2 veces.
Por eso hay que restarle una vez la intersección

LEYES DE "DE MORGAN"

- $(\overline{A \cup B}) = \bar{A} \cap \bar{B} = 1 - P(A \cup B)$
- $(\overline{A \cap B}) = \bar{A} \cup \bar{B} = 1 - P(A \cap B)$

Soy Augustus De Morgan, matemático indio.
No me quites el "de" del apellido, por favor...

AXIOMÁTICA DE KOLMOGOROV

- $P(E) = 1$ ← E: suceso seguro
- $P(A) \geq 0$
- Si $A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Propiedades:

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = 0$
- Si $A \subset B \rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $Si\ A_1, A_2, \dots A_k$ incompatibles dos a dos → $P(A_1 \cup A_2 \dots \cup\ A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots P(A_k)$

PROBABILIDAD DE LAPLACE

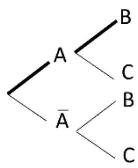
- $P(suceso) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}$

PROBABILIDAD CONDICIONADA

Teorema de la Probabilidad Total

- $P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2)$

Usada sobre todo en árboles



Teorema de Bayes

- $P(A/B) = \frac{P(A) \cdot P(B/A)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

DISTRIBUCIONES DE LA PROBABILIDAD

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DE VARIABLE DISCRETA

Resultado de asignar a cada valor de la variable x_i su probabilidad p_i
Cada p_i es un nº entre 0 y 1: $0 \le p_i \le 1$. La suma de todos los p_i es 1

Parámetros: similares a los de las distribuciones estadísticas:

- MEDIA: $\mu: \sum p_i x_i$
- VARIANZA: $\sigma^2 = \sum p_i x_i^2 - \mu^2$
- DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{\sum p_i x_i^2 - \mu^2}$

LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL *B (n, p)*

Al suceso *A* se llama **éxito,** y a su probabilidad $P[A] = p$
Probabilidad de su contrario: $P[A'] = 1 - p = q$

Se repite *n* veces esa experiencia y nos preguntamos el nº de éxitos (x)
La distribución de probabilidad de la variable x es la distribución binomial y se designa $B(n, p)$

$p = P[A]$: probabilidad de éxito
n: nº de veces que se repite la experiencia

Si x es una variable con distribución $B(n, p)$, la probabilidad $P[x = k]$ de tener k éxitos es:

$$\boxed{P[x = k] = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}}$$

- MEDIA: $\mu = np$
- DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{npq}$

RECUERDA

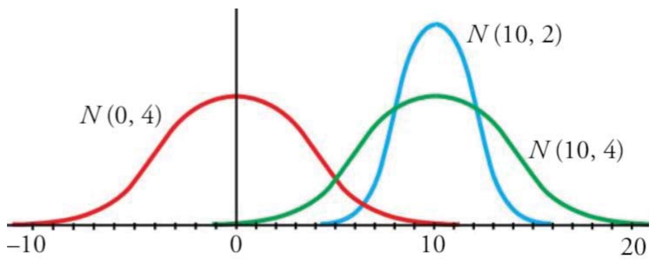
$$C_5^3 = \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10; \quad \binom{m}{0} = 1; \quad \binom{m}{1} = m$$

Con la Calculadora:

5 SHIFT ÷ 3 = "5C3" en pantalla: buscar función "nCr"

LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

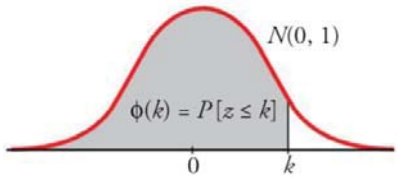
La curva normal es una función de probabilidad continua y simétrica, cuyo máximo coincide con la media, μ. Para cada valor de μ y σ (desviación típica), hay una curva normal, que se designa $N(\mu, \sigma)$



Parecen distintas, pero el reparto de probabilidades en ellas es prácticamente idéntico. Sólo depende de μ y de σ

- **TABLA DE ÁREAS BAJO LA CURVA NORMAL *N (0,1)***

En la distribución N (0,1) a la variable se le designa la letra z. La tabla da las probabilidades $P[z \le k]$ para valores de k de 0 a 3,99 → $P[z < k] = \phi(k)$



- **CÁLCULO DE PROBABILIDADES EN UNA DISTRIBUCIÓN *N (0,1)***
  - Si k≥0, las probabilidades $P[z \le k] = P[z < k] = \phi(k)$ las da directamente la tabla
  - $P[z \ge k] = 1 - P[z < k] = 1 - \phi(k)$
  - Para abscisas negativas (recuerda: curva simétrica): $P[z \le -k] = P[z \ge k] = 1 - \phi(k)$

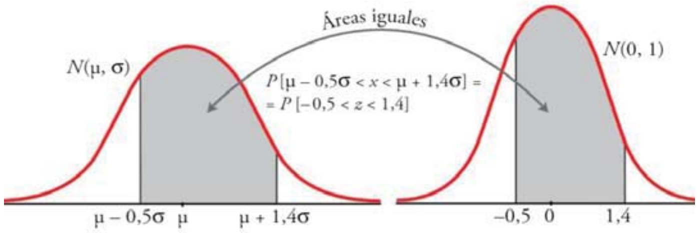
Las restantes probabilidades se pueden obtener a partir de estas:

$$P[z \ge 1{,}73] = 1 - P[z < 1{,}73] = 1 - \phi(1{,}73) = 1 - 0{,}9582 = 0{,}0418$$

- **CÁLCULO DE PROBABILIDADES EN UNA DISTRIBUCIÓN *N (μ, σ)***

Para calcular probabilidades en una distribución *N (μ, σ)* se relaciona con *N (0, 1)*

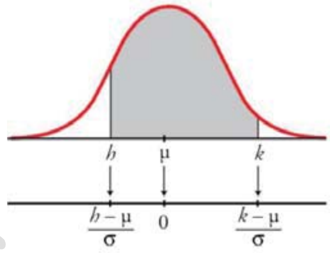
Hay que expresar los extremos de los intervalos en *nº de desviaciones típicas que se separan de la media* → **tipificar la variable.**



Si x es *N (μ, σ)* → $P[h < x < k] = P\left[\frac{h-\mu}{\sigma} < z < \frac{k-\mu}{\sigma}\right]$

El cambio $k \rightarrow \frac{h-\mu}{\sigma}$ se llama **tipificación de la variable**.

La variable ya tipificada, z, sigue una distribución *N(0, 1)*



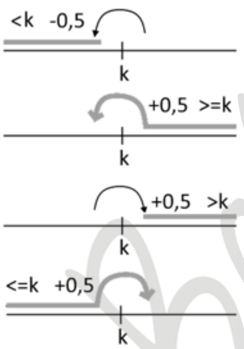
NOTA: Observa que hemos llamado "x" a la variable de una distribución *N (μ, σ)* cualquiera, y "z" a la variable de la distribución *N (0, 1)*. Así lo haremos siempre.

APROXIMACIÓN BINOMIAL A LA NORMAL

Cuando np y nq son **ambos mayores que 3**, la aproximación es muy buena. Y **si superan a 5,** la aproximación **es casi perfecta**.
La curva normal a la que se aproxima tiene la misma media y la misma desviación típica que la binomial, es decir:

$$\boldsymbol{\mu = np \qquad \sigma = \sqrt{npq}}$$

Si x es $B(n,p)$ y se parece mucho a x', $N(np, \sqrt{npq})$, el cálculo de probabilidades de x puede hacerse a partir de x' del siguiente modo:



$$\boxed{P(x \le k) = P(x' \le k + 0{,}5)}$$

$$P(x < k) = P(x' \le k - 0{,}5)$$
$$P(x \ge k) = P(x' \ge k - 0{,}5)$$
$$P(x > k) = P(x' \ge k + 0{,}5)$$
$$P(x = k) = P(k - 0{,}5 \le x' \le k + 0{,}5)$$

Corrección de YATES o del **medio punto**.

← REFERENCIA.
Si hacemos 1 cambio al <= cambia el sigo del 0,5 a −
Si hacemos 2 cambios, queda +

TRUCO: con los dibujitos de la izda. no fallas

PASOS A SEGUIR – PROBLEMAS DE APROXIMACIÓN A LA NORMAL

- Decidimos si podemos normalizar
- Aproximamos la distribución binomial a normal
- Aplicamos corrección de Yates
- Tipificamos la variable
- Resolvemos con tabla de distribución normal

$x \rightarrow x' \rightarrow z$

2 *El 2% de los tornillos fabricados por una máquina presentan defectos. En un lote de 2000 tornillos, ¿cuál es la probabilidad de que haya menos de 50 defectuosos?*

Es una binomial $B(2000; 0{,}02)$, con $\mu = np = 40$ y $\sigma = \sqrt{npq} = 6{,}26$.

Ya vemos que $np = 40 > 5$ y también $nq > 5$. Por tanto, podemos asegurar que se aproxima a la normal $N(40; 6{,}26)$.

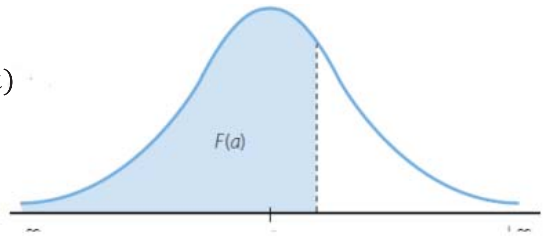
x es $B(2000; 0{,}02)$ → x' es $N(40; 6{,}26)$ → z es $N(0, 1)$

$$P[x < 50] = P[x' \le 49{,}5] = P\left[z \le \frac{49{,}5 - 40}{6{,}26}\right] = P[z \le 1{,}52] =$$
$$= \phi(1{,}52) = 0{,}9357$$

La probabilidad pedida es 0,9357.

TABLA DE DISTRIBUCIÓN NORMAL, N(0,1)

$F(a) = P(Z \leq a)$

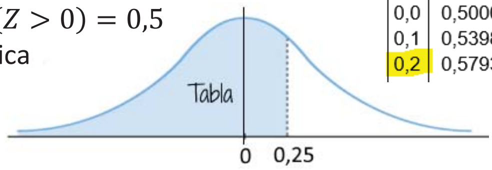


a	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

USO TABLA NORMAL (0,1)

DISTRIBUCIÓN NORMAL (0,1)

- $P(-\infty < Z < \infty) = 1$
- $p(Z < 0) = P(Z > 0) = 0,5$
- Función simétrica
- $P(Z = a) = 0$

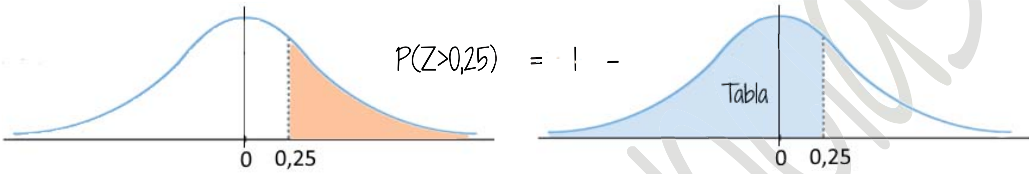


a	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987

- $P(Z < 0,25) = dato\ tabla = 0,5987$

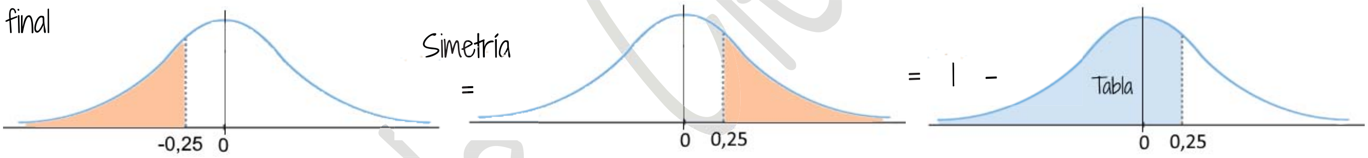
CASOS TÍPICOS

- $P(Z > 0,25) = 1 - P(Z < 0,25) = 1 - 0,5987 = 0,4013$



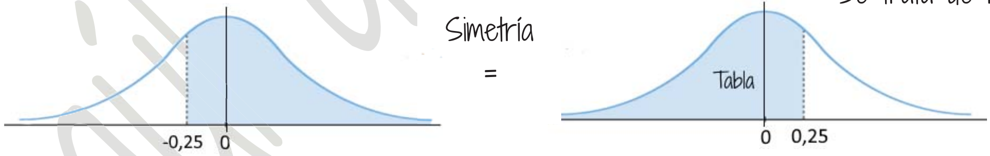
La misma
área final

- $P(Z < -0,25) = P(Z > 0,25) = 1 - P(Z < 0,25) = 1 - 0,5987 = 0,4013$

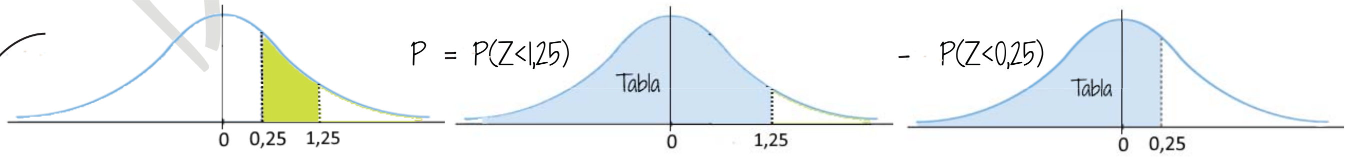


- $P(Z > -0,25) = P(Z < 0,25) = 0,5987$

NO APRENDER DE MEMORIA
Se trata de razonar cada caso

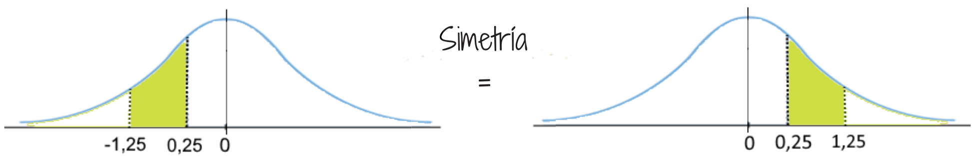


- $P(0,25 < Z < 1,25) = P(Z < 1,25) - P(Z < 0,25) = 0,8944 - 0,5987 = 0,2957$



La misma
área final

- $P(-1,25 < Z < -0,25) = P(0,25 < Z < 1,25) = 0,2957$



DISTRIBUCIONES NORMAL Y BINOMIAL

1.– Un tratamiento contra el cáncer produce mejoría en el 80% de los enfermos a los que se les aplica. Se suministra a 5 enfermos. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que los 5 pacientes mejoren. (p = 0,3277)
b) Calcular la probabilidad de que, al menos tres no experimenten mejoría. (p=0,0576)
c) ¿Cantos pacientes se espera que mejoren? (4 pacientes)

2.– Una compañía de seguros estima que la probabilidad de que un asegurado teña un accidente de motocicleta é 0,25. De 10 asegurados,

a) ¿Cuál es el número medio de accidentados que se puede esperar? (2,5 accidentados)
b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga al menos 3 accidentados? (p = 0,4774)

3.– Una caja contiene 10 enchufes, de los cuales 3 son defectuosos. Se extraen, de una forma sucesiva y sin devolverlos a la caja, 4 enchufes. Calcular la probabilidad de que:

a) Los 4 enchufes extraídos no sexan defectuosos. (p = 1/6)
b) Al menos un enchufe, de los 4 extraídos, sea defectuoso. (p = 5/6)

4.– Para unha variable aleatoria X con distribución normal sábese que a media é 5000 e a P(X < 3000) = 0,1587. Determinar a desviación típica. (= 2000)

5.– Sábese que a vida media dun electrodoméstico é de 10 anos cunha desviación típica de 0,7 anos. Supoñendo que dita vida media segue unha distribución normal, calcular:

a) A probabilidade de que o electrodoméstico dure máis de 9 años. (p = 0,9236)
b) A probabilidade de que dure entre 9 e 11 anos. (p = 0,8472)

6.- Aplícase un test de fluidez verbal a 500 alumnos dun instituto de secundaria e as puntuacións obtidas distribúense según unha lei normal de media 80 e desviación típica 12.

a) ¿Qué puntuación separa o 25% dos alumnos de menor fluidez verbal? (71,9)
b) ¿A partir de que puntuación se atopa O 25% dos alumnos con maior fluidez verbal? (88,1)

7. – A probabilidade de que deixe de fumar un paciente, que se someteu a un réxime médico riguroso, é de 0,8. Elíxense 100 pacientes, que se someteron a dito réxime. ¿Cal é a probabilidade de que deixaran de fumar entre 74 e 85 pacientes, ambos inclusive? (Aproximar mediante a normal; p = 0,8621)

8.- O 25% das vivendas dunha determinada rexión ten conexión a Internet. Elíxense 80 vivendas desa rexión e se pídes:

a) Probabilidade de que alomenos 20 vivendas estean conectadas a Internet. (p= 0,5517)
b) Número esperado de vivendas non conectadas a Internet. (60 vivendas)
c) Probabilidade de que o número de vivendas que están conectadas a Internet estea entre 10 e 30. (p = 0,9932)

9.- Un exame de preguntas con respostas múltiples consta de 8 preguntas con 4 opcións de contestación. Se un alumno responde ao azar, calcular a probabilidade de que:

a) Responda correctamente a 6 preguntas (p = 0,0038)
b) Responda correctamente alomenos 6 preguntas. (p = 0,0042)
c) Calcular o número medio de respostas acertadas se responde a 40 preguntas. (10)

11.- Unha compañía de autobuses coñece que o retraso na chegada segue unha lei normal, de media 5 minutos e que o 68,26 % dos autobuses chega cun retraso comprendido entre 2 e 8 minutos.

a) ¿Cal á a desviación típica? (= 3 min)
b) ¿Cal é a probabilidade de que un autobús chegue cun retraso de máis de 10 minutos? (p = 0,0475)

12.- O peso dos socios do clube “Amigos do Bo Comer” distribúese según unha lei normal de media 92 kg e desviación típica 20 kg. ¿Que peso máximo teñen o 10% dos individuos menos obesos de tan opíparo club? (P = 66 kg)

PROBABILIDAD

2017

JUNIO. Opción A

a) En un experimento aleatorio, sean A y B dos sucesos con $P(\overline{A}) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}7$. Si A y B son independientes, calcula $P(A \cup B)$ y $P(A - B)$.

b) En un grupo de 100 personas hay 40 hombres y 60 mujeres. Se eligen al azar 4 personas del grupo, ¿cuál es la probabilidad de seleccionar más mujeres que hombres?

SOL A: $P(A \cup B) = 0{,}88$; $P(A - B) = 0{,}18$ (0,5 cálculo de $P(A \cup B)$ + 0,5 cálculo de $P(A - B)$)

SOL B: 0,4752 (0,5 formulación + 0,5 cálculo)

JUNIO Opción B

En un estudio realizado en un centro de salud, se observó que el 30% de los pacientes son fumadores, y de estos, el 60% son hombres. Entre los pacientes que no son fumadores, el 70% son mujeres. Elegido un paciente al azar,

a) Calcula la probabilidad de que el paciente sea mujer

b) Si el paciente elegido es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que sea fumador?

SOL A: 0,61 (1p); SOL B: 0,461) 1 punto

SEPTIEMBRE Opción A

Sean A y B dos sucesos con $P(A) = 0{,}7; P(B) = 0{,}6$ y $P(A \cup B) = 0{,}9$

a) ¿Son A y B sucesos independientes? Justifica la respuesta

b) Calcula $P(A - B)$ y $P(A/\bar{B})$.

SOL A: 0,4. No. (0,5 cálculo +0,5 justificación); SOL B: $P(A - B) = 0{,}3$; $P(A/\bar{B}) = 0{,}75$ (1p)

SEPTIEMBRE Opción B

El total de ventas diarias de un pequeño restaurante es una variable que sigue una distribución normal de media 1220€ al día y desviación típica 120€ al día.

a) Calcula la probabilidad de que en un día al azar las ventas excedan de 1400€

b) Si el restaurante debe vender por lo menos 980€ al día para cubrir los gastos, ¿cuál es la probabilidad de que un día al azar, el restaurante no cubra los gastos?

SOL A: P(X>1400) = 0,0668 (1p); SOL B: P(X<980) = 0,0228 (1p)

2018

JUNIO. Opción A

En las rebajas de unos grandes almacenes están mezcladas y a la venta 200 bufandas de la marca A, 150 de la marca B y 50 de la marca C. La probabilidad de que una bufanda de la marca A sea defectuosa es 0,01; 0,02 si es de la marca B y 0,04 si es de la marca C. Una persona elige una bufanda al azar.

a) Calcula la probabilidad de que la bufanda elegida sea de la marca A o defectuosa.

b) Calcula la probabilidad de que la bufanda elegida no sea defectuosa ni de la marca C

c) Si la bufanda elegida no es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca B?

SOL A: 0,5125 (0,75p); SOL B: 0,8625 (0,5p); SOL C: 0,374 (0,75p)

JUNIO Opción B

a) Un examen tipo test consta de 10 preguntas, cada una con 4 respuestas de las cuales solo una es correcta. Si se contesta al azar, ¿Cuál es la probabilidad de contestar bien al menos dos preguntas?

b) La duración de un cierto tipo de pilas eléctricas es una variable que sigue una distribución normal de media 50 horas, y desviación típica 5 horas. Calcula la probabilidad de que una pila eléctrica de este tipo, elegida al azar, dure menos de 42 horas.

SOL A: 0,756 (1p); SOL B: 0,0548 (1p)

SEPTIEMBRE Opción A

En un bombo tenemos 10 bolas idénticas numeradas del 0 al 9 y cada vez que hacemos una extracción devolvemos la bola al bombo.

a) Si hacemos 5 extracciones, calcula la probabilidad de que el 7 salga menos de dos veces.

b) Si hacemos 100 extracciones, calcula la probabilidad de que el 7 salga menos de 9 veces.

SOL A: P(X<2) = 0,9185 (1p); SOL B: P(X<9) = 0,3085 (1p)

SEPTIEMBRE Opción B

En una fábrica hay tres máquinas, A, B y C que producen la misma cantidad de piezas. La máquina A produce un 2% de piezas defectuosas, la B un 4% y la C un 5%.

a) Calcula la probabilidad de que una pieza elegida al azar sea defectuosa.

b) Si se elige una pieza al azar y resulta que no es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina A?

SOL A: P(D) = 0,03667 (1p); SOL B: $P(A|\overline{D})$=0,3391 (1p)

2019

JUNIO. Opción A

a) El 40% de los habitantes de una cierta comarca tienen camelias, el 35% tienen rosas y el 21% tienen camelias y rosas. Si se elige al azar un habitante, calcular las 5 probabilidades siguientes: de que tengan camelias o rosas; de que no tenga ni camelias ni rosas; de que tenga camelias sabiendo que tiene rosas; de que tenga rosas sabiendo que tiene camelias; y de que solamente tenga rosas o solamente tenga camelias.

b) Si en un auditorio hay 50 personas, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos 2 naciesen en el mes de enero?

SOL A: $P(C \cup R) = 0{,}54; P(\bar{C} \cap \bar{R}) = 0{,}46; P(C|R) = 0{,}6; P(R|C) = 0{,}525; P(C \cup R) - P(C \cap R) = 0{,}33$

SOL B: 0,92

JUNIO Opción B

Da respuesta a los siguientes apartados:

a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Calcula $P(A)$ si $P(B) = 0{,}8$, $P(A \cap B) = 0{,}2$ y $P(A \cup B)$ es el triple de $P(A)$.

b) En un determinado lugar, la temperatura máxima durante el mes de julio sigue una distribución normal de media 25ºC y desviación típica 4ºC. Calcula la probabilidad de que la temperatura máxima esté comprendida entre 21ºC y 27,2ºC. ¿En cuántos días del mes se espera que la temperatura máxima permanezca dentro de este rango?

SOL A: P(a)=0,3; SOL B: 0,5501, 17 días

JULIO. Opción A

a) La probabilidad de que un chico recuerde regar su rosal durante una cierta semana es de 2/3. Si se riega el rosal sobrevive con probabilidad 0,7; si no, lo hace con probabilidad 0,2. Al finalizar la semana, el rosal ha sobrevivido. ¿Cuál es la probabilidad de que el chico no lo haya regado?

b) Una fábrica produce piezas cuyo grosor sigue una distribución normal de media 8 cm y desviación típica 0,01 cm. Calcula la probabilidad de que una pieza tenga un grosor comprendido entre 7,98 y 8,02 cm.

SOL A: $P(N|S) = 0{,}125$*; SOL B: P=0,9593*

JULIO Opción B

Da respuesta a los siguientes apartados:

a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral tal que $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = 0{,}4$ y $P(A \cup B) = 0{,}5$. Calcula $P(\bar{A}), P(\bar{B}), P(A \cap B), P(\bar{A} \cup \bar{B})$. Razona si A y B son o no sucesos independientes.

b) La probabilidad de que un determinado jugador de futbol marque gol desde el punto de penalti es 0,7. Si lanza 5 penaltis calcula las siguientes probabilidades: de que no marque ningún gol; de que marque por lo menos dos goles; y de que marque 5 goles. Si lanza 2100 penaltis, calcula la probabilidad de que marque por lo menos 1450 goles. Se está asumiendo que los lanzamientos son sucesos independientes.

SOL A: $P(\bar{A}) = 0{,}8;\ P(\bar{B}) = 0{,}6;\ P(A \cap B) = 0{,}1;\ P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0{,}9$. *No son independientes.*

SOL B: $P(X = 0) = 0{,}00243; P(X \geq 2) = 0{,}96922; P(X = 5) = 0{,}16807; P(X \geq 1450) = 0{,}835$

2020

ORDINARIA JULIO 7

Se seleccionan 250 pacientes para estudiar la eficacia de un nuevo medicamento. A 150 de ellos se le administra el medicamento, mientras que el resto son tratados con placebo. Sabiendo que se curaron el 80% de los que tomaron el medicamento, ¿cuál es la probabilidad de que, seleccionado un paciente al azar, tomase el placebo o no curase? (Entiéndese que ninguno se cura con placebo)

SOL: 0,52

ORDINARIA JULIO 8

En una cadena de montaje, el tiempo empleado para realizar un determinado trabajo sigue una distribución normal de media 20 minutos y desviación típica 4 minutos. Calcula la probabilidad de que se haga ese trabajo en un tiempo comprendido entre 16 y 26 minutos.

SOL: 0,7745

EXTRAORDINARIA SEPTIEMBRE 7

El 57% de los estudiantes matriculados en la Universidad de Cambridge son naturales del Reino Unido y, de entre todos esos, el 83% aprueban con honores. Además, el porcentaje global de aprobados con honores es del 80%. Calcular la probabilidad de que un estudiante elegido al azar no haya nacido en el Reino Unido sabiendo que aprobó con honores.

SOL: 0,408625

EXTRAORDINARIA SEPTIEMBRE 8

a) En una determinada población de árboles, el 20% tienen más de 30 años. Si se eligen 40 árboles al azar, calcule la probabilidad de que solamente 4 de ellos tengan más de 30 años. El número total de árboles es tan grande que se puede asumir elección con reemplazo.

b) Si X sigue una distribución normal de media 15 y $P(X \leq 18) = 0{,}6915$, ¿cuál es la desviación típica?

SOL A: 0,0475; SOL B: 6

2021 **ORDINARIA JUNIO 7**

a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Calcule $P(A)$ sabiendo que $P(B) = 2P(A)$, $P(A \cap B) = 0.1$ y $P(A \cup B) = 0.8$.

b) Diga si los sucesos A y B son o no independientes, si se sabe que $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0{,}82$.

SOL: P(A)=0,3. Son independientes

ORDINARIA JUNIO 8

El portador de una cierta enfermedad tiene un 10% de probabilidades de contagiarla a quien no estuvo expuesto a ella. Si entra en contacto con 8 personas que no estuvieron expuestas, calcule:

a) La probabilidad de que contagie a un máximo de 2 personas.

b) La probabilidad de que contagie a 2 personas por lo menos.

SOL: P=0.9619, P=0.1869

EXTRAORDINARIA JULIO 7

En una determinada ciudad, el 8% de la población practica yoga, el 20% tiene mascota y el 3% practica yoga y tiene mascota. Si en esa ciudad se elige una persona al azar, calcule:

a) La probabilidad de que no practique yoga y a la vez tenga mascota.

b) La probabilidad de que tenga mascota sabiendo que practica yoga.

SOL:

EXTRAORDINARIA JULIO 8

El grosor de las planchas de acero que se producen en una cierta fábrica sigue una distribución normal de media 8 mm y desviación típica 0.5 mm. Calcule la probabilidad de que una plancha elegida al azar tenga un grosor comprendido entre 7.6 mm y 8.2 mm

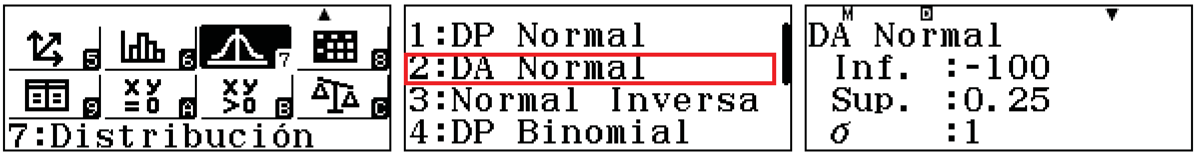
SOL:

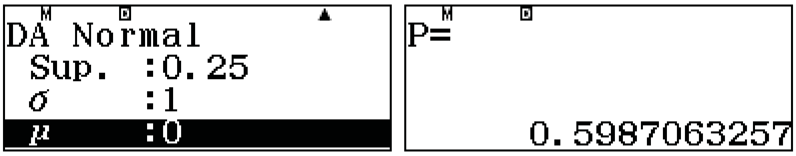
CASIO CLASSWIZ fx-570/991

PROBABILIDADES EN UNA DISTRIBUCIÓN *N (0,1)*

- $P(Z < 0{,}25) = 0{,}5987$

Entramos en el menú distribución MENU 7 y siempre seleccionaremos la opción 2.

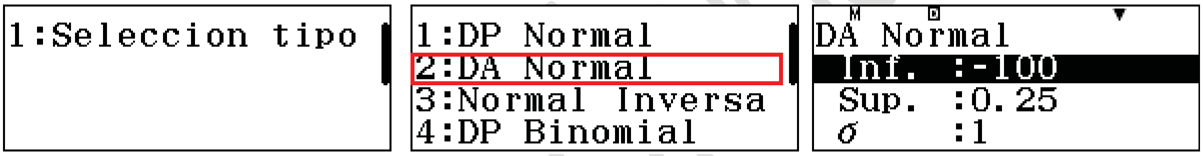




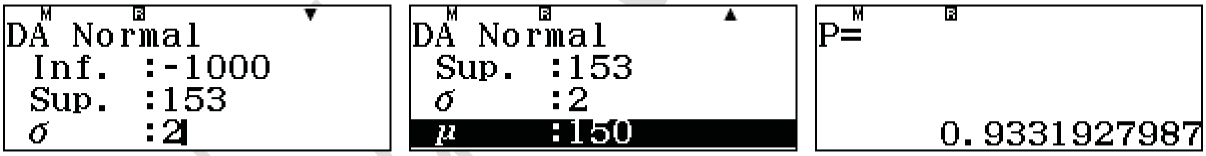
Nos puede servir para comprobar. Los límites $\pm\infty$ basta con utilizar ± 100 (10 también funciona).

Introducimos valor y pulsamos =. Podemos cambiar los parámetros de la distribución *N (μ, σ)*.

Para calcular otro valor, pulsamos OPTN 1 y seguimos como en el caso anterior:



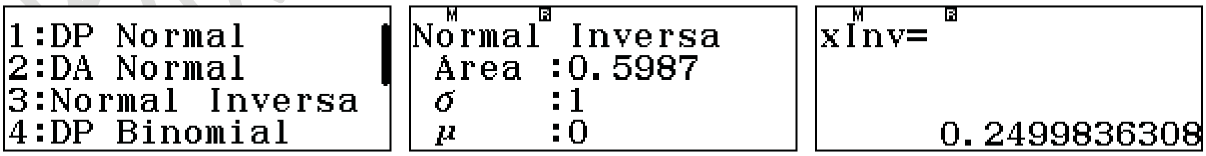
- $P(Z < 153) =$ en una distribución $N(150, 2)$



CÁLCULO DE LA Z DADA EL ÁREA

$P(Z < x) = 0{,}5987$ en una distribución $N(0, 1)$. Calcular x

Entramos en distribución MENU 7 y ahora seleccionaremos la opción 3. El área es nuestra probabilidad.



MODELO DE EXAMEN

(El/la estudiante debe responder solamente las preguntas de una de las opciones. La puntuación máxima por preguntas es la siguiente: 1.ª pregunta: **2 puntos**; 2.ª pregunta: **3 puntos**; 3.ª pregunta: **3 puntos**; 4.ª pregunta: **2 puntos**).

OPCIÓN A

1. Da respuesta a los apartados siguientes:
   a) Si A es una matriz cuadrada invertible, despeja X en la ecuación $AXA^{-1} = 2BA^{-1} - I$.
   b) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que cumple $AXA^{-1} = 2BA^{-1} - I$.
2. Se pide:
   a) Estudiar la continuidad en $x = 1$ (si es discontinua, clasificar la discontinuidad) y determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$.
   b) Dada la función $g(x) = x \ln x$, calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $g(x)$ que es paralela al eje de abscisas.
   c) Dibujar la región limitada por las rectas $y = x$, $y = 2x$ y la parábola $y = x^2$, y calcular su área.
3. Da respuesta a los apartados siguientes:
   a) Estudia la posición relativa de la recta $r: \begin{cases} x - 2y - 1 & = & 0, \\ y + z & = & 0 \end{cases}$ y la recta s que pasa por los puntos $P(0,1,3)$ y $Q(2,2,2)$.
   b) Calcula la ecuación implícita del plano que contiene las rectas r y s.
   c) Determina la ecuación implícita del plano perpendicular a la recta r y que pasa por el origen de coordenadas.
4. Sean A y B dos sucesos del mismo espacio muestral, con $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{14}{15}$ y $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$.
   Se pide:
   a) Calcular $P(B)$ y $P(A \cap \bar{B})$.
   b) Calcular $P(B|A)$. ¿Son independientes los sucesos A y B? Justifica la respuesta.

OPCIÓN B

1. Da respuesta a los apartados siguientes:
   a) Discute, según los valores del parámetro a, el siguiente sistema lineal:
   $$\begin{cases} 2x - y + 2z & = & a, \\ 2x + 2z & = & 0, \\ x + y + z & = & a. \end{cases}$$
   b) Resuélvelo, si es posible, en el caso en que $a = 0$.
2. Da respuesta a los apartados siguientes:
   a) Enuncia el teorema de Rolle. ¿Cumple la función $f(x) = x^2|x|$ las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-1,1]$? Justifica la respuesta.
   b) Dada la función $g(x) = \mathrm{e}^x(x^2 - 4x + c)$, determina el valor de c que hace que $g(x)$ tenga un único punto crítico. Para $c = 5$, calcula los puntos críticos de $g(x)$ y determina si en ellos la función presenta extremos relativos o puntos de inflexión.
   c) Calcula el valor de la integral definida $\int_0^2 \frac{x+3}{\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x$.
3. Da respuesta a los apartados siguientes:
   a) Determina el valor de λ que hace que los puntos $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,1,1)$ y $(1,\lambda,1)$ sean coplanarios, y obtén la ecuación implícita del plano que los contiene.
   b) Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1: x - y + z = 0$ y $\pi_2: x + y - z = 2$. En caso de que se corten, calcula el ángulo que forman.
   c) Determina las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $A(3,2,1)$ y no corta a ninguno de los planos π_1 y π_2.
4. Da respuesta a los apartados siguientes:
   a) Ana y Luis comparten coche para desplazarse a su lugar de trabajo. Ana conduce el 40% de los días y Luis el resto. Cuando conduce Ana, llegan tarde al trabajo el 5% de los días, y cuando conduce Luis llegan tarde el 8% de los días. Calcular la probabilidad de que un día elegido al azar lleguen tarde al trabajo. Si cierto día llegan tarde, calcular la probabilidad de que ese día hubiera conducido Ana.
   b) Las calificaciones de los aspirantes presentados a un examen para contratación laboral se distribuyen normalmente con media 5.5 y desviación típica 2. ¿Qué porcentaje de aspirantes obtuvo calificaciones comprendidas entre 5 e 7.5 puntos?

RECURSOS EXTRA

BAÚL DE CIENCIAS

- Blog https://bauldeciencias.blogspot.com/p/mates-2-bach.html
- Corcho virtual http://bit.ly/CorchoMate2
- Twitter https://twitter.com/BaulCiencias
- Youtube http://bit.ly/BaulCienciasYoutube

OTROS RECURSOS

- PDF oro https://t.co/QjefXLiEVc
- Mariel Mates https://marielmatesblog.wordpress.com/

TWITTER

Algunas cuentas interesantes para seguir de matemáticas (tienen buenos recursos, canales de YouTube recomendables…):

- Baúl de Ciencias @BaulCiencias
- Una Química Para Todos @quimicaPau
- Profesor 10 de mates @profesor10mates
- Mates con Andrés @matesconandres

Este icono indica que puedes realizar los cálculos con tu calculadora CASIO Classwizz. Hay una pequeña guía al final de cada bloque.