SISTEMAS DE ECUACIONES

MATRICES ASOCIADAS A UN SISTEMA

Dado el sistema $\begin{cases} 2x-3y+4z=1 \\ 2x+6y+\ z=\ 2 \\ 4x-7y+8z=8 \end{cases}$ tenemos las matrices asociadas:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & -7 & 8 \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & 8 & 8 \end{array}\right)$$

Matriz Coeficientes   Matriz incógnitas   Matriz términos independts.   Matriz ampliada

$$\begin{cases} 2x-3y+4z=1 \\ 2x+6y-3z=2 \\ 4x-7y+5z=8 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & -7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

A · X = B

REGLA DE CRAMER

Para resolver Sistemas Compatibles Determinados.

→ Sustituir la matriz de términos independientes por cada columna de la matriz coeficientes (A) y calcular su determinante. Así al dividir dicho determinante entre |A|, tenemos en cada caso x, y, z.

→ MUY IMPORTANTE: Si |A|=0 no podemos resolver por Cramer

EJEMPLO: resuelve $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y+2z=1 \\ 2x+y+2z=0 \end{cases}$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow |A|=1\neq 0 \rightarrow rang(A)=3 \rightarrow puedo\ usar\ Cramer$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{matrix} \end{vmatrix}}{|A|}=-9; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{matrix} \end{vmatrix}}{|A|}=4; \quad z=\frac{\begin{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}} \end{vmatrix}}{|A|}=7; \quad \begin{cases} x=-9 \\ y=4 \\ z=7 \end{cases}$$

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS

- Sistemas
  - Compatibles
    - Determinados (SCD) — Una única solución
    - Indeterminados (SCI) — Infinitas soluciones
  - Incompatibles (SI) — No tiene solución

DISCUSIÓN DE SISTEMAS

Se trata de discutir (clasificar) y/o resolver un sistema de ecuaciones lineales dependiendo de los valores que tome un parámetro.

- Se toma la matriz (A|B) formada por la matriz de coeficientes A y la matriz de términos independientes B. Se estudia el rango de la matriz A en los diferentes casos y se compara con el rango de la matriz A*.

- **TEOREMA DE ROUCHÉ - FRÖBENIUS**

MUY IPORTANTE
Siempre cae

Para discutir el tipo de sistema utilizando los rangos de A y A*.

Si rango (A) = rango (A*) = Nº incógnitas → Sistema Compatible Determinado
Si rango (A) = rango (A*) ≠ Nº incógnitas → Sistema Compatible Indeterminado
Si rango (A) ≠ rango (A*) → Sistema Incompatible

- **SISTEMA HOMOGÉNEO**

Si el sistema es homogéneo (todas las ecuaciones están igualadas a cero), no se utiliza A*:

Si rango (A) = nº de incógnitas → Stma. Compatible Determinado → **Sol. trivial:** $\boldsymbol{x=y=z=0}$
Si rango (A) < nº de incógnitas → Stma. Compatible Indeterminado → **Infinitas soluciones**